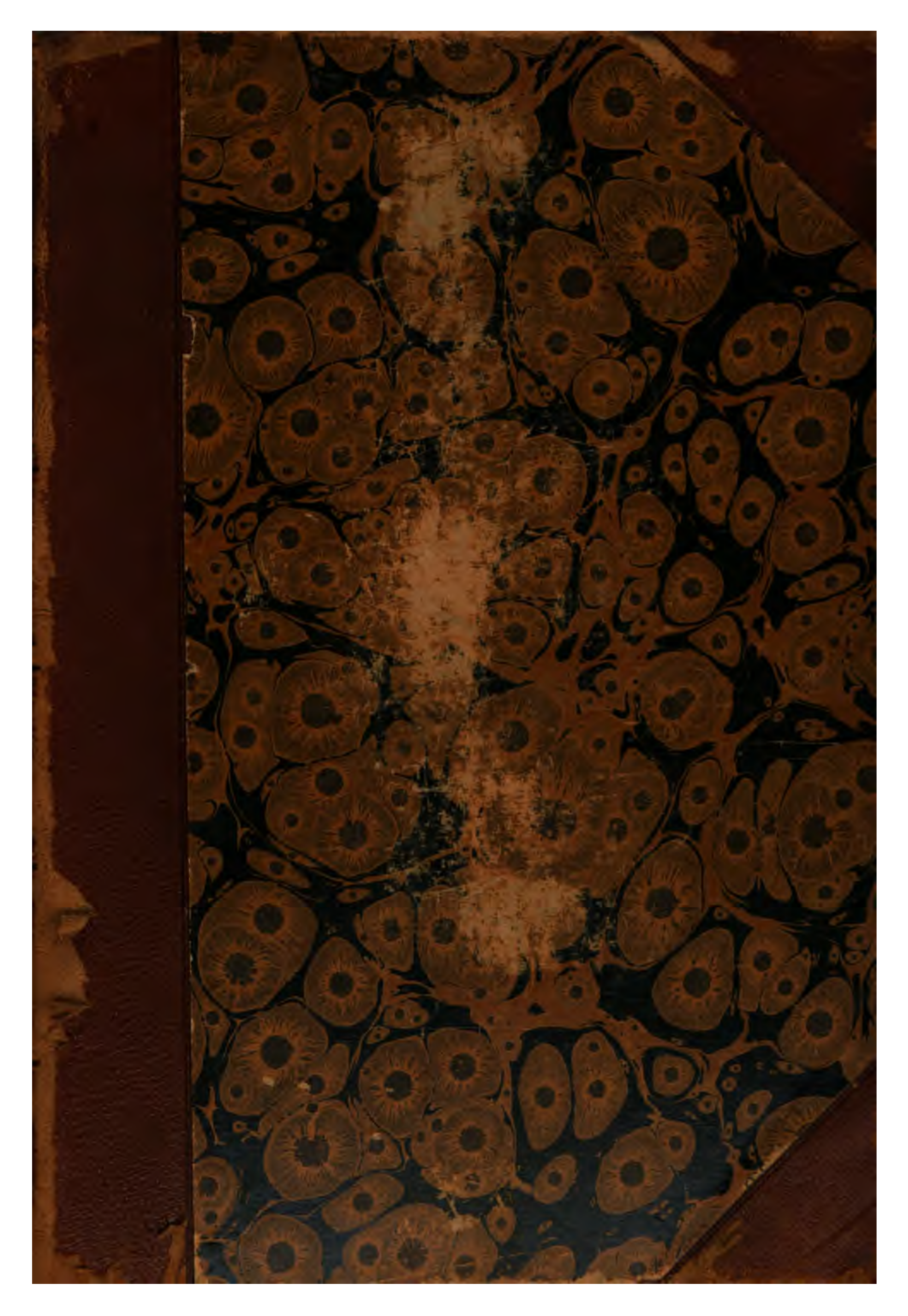


9040

DIE FOCALEIGENSCHAFTEN

DER

FLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG.

EIN NEUES CAPITEL ZU DEN LEHRBÜCHERN DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE DES RAUMES

VON

DR. OTTO STAUDE,

ORDENTLICHEM PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ROSTOCK.

MIT FIGUREN IM TEXT.

BG

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1896.

Vorwort.

Das vorliegende Buch behandelt die von mir gefundenen Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung und bietet gegenüber meinen früheren Veröffentlichungen*) über denselben Gegenstand nicht nur eine durchgängige Vereinfachung der Beweise dar, sondern auch eine wesentliche Vervollständigung der Theorie. Es sind vor allem zu den Focaleigenschaften der Ellipsoide und Hyperboloide die der Paraboloide neu hinzugekommen**). Es werden ferner mehrere bisher kaum beachtete Einzelheiten der Theorie näher untersucht, wie die unbestimmte Form der gebrochenen Focaldistanzen in den Kreispunkten der Ellipsoide und zweischaligen Hyperboloide. Endlich sind auch die Focaleigenschaften der Rotationsellipsoide, Rotationshyperboloide und Rotationsparaboloide als organische Bestandtheile der allgemeinen Theorie eingefügt worden.

Durch die neue Bearbeitung hoffe ich den Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung dieselbe Verbreitung in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie zu ermöglichen, welche die entsprechenden Eigenschaften der Kegelschnitte schon längst gefunden haben. Mit Rücksicht darauf schliesst sich das Buch unmittelbar an die in den Lehrbüchern enthaltene Classification und Gestaltbeschreibung der Flächen zweiter Ordnung an, womit zugleich die wenigen zu seiner Lectüre erforderlichen Vorkenntnisse bezeichnet sind. Es beginnt mit der Ableitung der Hauptsätze über confocale Flächen (§§ 1—5; 26—28) und über elliptische und parabolische Coordinaten (§§ 6—10; 29—33) als der natürlichen Grundlagen für die darauf folgenden Entwicklungen über Focalkegel, Focallinien und gebrochene Focaldistanzen (§§ 11—25; 34—43). Die aus der analytischen Geometrie der Ebene und aus einigen dem Gegenstande ferner liegenden Theilen der analytischen Geometrie des Raumes nothwendigen Vergleichspunkte und Voraussetzungen

*) In den Berichten der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Jahrg. 1882, und den Mathematischen Annalen, Bd. XX und Bd. XXVII.

**) Vgl. die vorläufige Mittheilung in den angeführten Berichten, Jahrg. 1895.

sind zur Erleichterung für den Leser unter einer dem Bedürfniss angepassten Form in den Anmerkungen I—V beigefügt.

Durch zahlreiche den Text begleitende Figuren habe ich mich bemüht, den Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung dieselbe Anschaulichkeit zu verleihen, wie sie denen der Kegelschnitte eigen ist. Diejenigen Bestandtheile der Construction dieser Figuren, welche für die vorgetragene Theorie selbst wesentlich erschienen, erfahren in der Anmerkung VI eine kurze Erläuterung.

Was die Hauptergebnisse des Buches selbst betrifft, so finden sich die Focaleigenschaften des Ellipsoides, des einschaligen und zweischaligen Hyperboloides, des elliptischen und hyperbolischen Paraboloides in den Sätzen III auf SS. 89, 97, 101, 155, 159 ausgesprochen.

Sie bieten in der vorliegenden Form eine durchgängige Analogie zu den bekannten Focaleigenschaften der Ellipse, Hyperbel und Parabel (SS. 168, 175) dar: Den beiden Brennpunkten von Ellipse und Hyperbel entsprechen die vier Hauptbrennpunkte (S. 2) von Ellipsoid und Hyperboloid. Den Entfernungen (Focaldistanzen) des laufenden Curvenpunktes von den beiden Brennpunkten entsprechen die kürzesten über einen der beiden Focalkegelschnitte (S. 2) gemessenen Entfernungen (gebrochenen Hauptfocaldistanzen, S. 75) des laufenden Flächenpunktes von den vier Hauptbrennpunkten. Wie für Ellipse und Hyperbel Summe und Differenz der beiden Focaldistanzen, so stehen für Ellipsoid und Hyperboloid Summe und Differenz zweier gebrochener Focaldistanzen in directer Beziehung zur Hauptaxenlänge (S. 2). Bei den Flächen wie den Curven zweiter Ordnung fällt die Normale in die Halbirungslinie des Winkels oder Nebenwinkels zweier Focaldistanzen. Bei dem elliptischen Paraboloid stimmt die auf die innere gebrochene Hauptfocaldistanz (S. 154) und die Hauptdirectrixebene bezügliche Focaleigenschaft Wort für Wort zu der Focaleigenschaft der Parabel, während die Focaleigenschaft des hyperbolischen Paraboloides sich denen der Hyperboloide und der Hyperbel an die Seite stellt. Endlich ist die Fadenconstruction des Ellipsoides (S. 92), welche sich auf dessen Focaleigenschaft gründet, das Seitenstück zu der bekannten Fadenconstruction der Ellipse aus ihren beiden Brennpunkten (S. 168).

Der Begriff der Focaldistanz selbst erfährt beim Uebergang von der Ebene zum Raume insofern eine wesentliche Erweiterung, als es sich dort um die absolut kürzeste, hier um die kürzeste über eine Curve gemessene Entfernung zweier Punkte handelt. Wie aber die gebrochene Focaldistanz des Raumes die gewöhnliche Focaldistanz der Ebene als besonderen Fall in sich schliesst (S. 87), so sind in den betrachteten Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung die Focal-

eigenschaften nicht nur der Kegelschnitte, sondern auch der Rotationsflächen zweiter Ordnung als specielle Fälle enthalten: Beim Uebergang des allgemeinen Ellipsoides oder Hyperboloides in ein Rotationsellipsoid oder Rotationshyperboloid vereinigen sich entweder von den vier Hauptbrennpunkten zwei in dem Mittelpunkte und lösen sich die beiden anderen in den Focalkreis der Rotationsfläche auf oder vereinigen sich die vier Hauptbrennpunkte paarweise (S. 3; 4). In beiden Fällen gehen Formeln und Wortlaut der Focaleigenschaften der allgemeinen Flächen unmittelbar in die der Rotationsflächen (Sätze III′ und III″ auf SS. 91, 92, 99, 103) über. Ein analoger Uebergang vollzieht sich vom elliptischen zum Rotationsparaboloid (Satz III′ auf S. 158). Bei Anwendung hingegen auf die Hauptebenen der Focalkegelschnitte liefert stets einer der beiden die Focaleigenschaft des Ellipsoides oder Hyperboloides ausmachenden Bestandtheile (Formeln 55, S. 88; 57, S. 96; 59, S. 100) direct die Focaleigenschaft der Ellipse und Hyperbel in ihrer gewöhnlichen Form, während sich aus dem anderen eine zusammengesetzte Focaleigenschaft der centrischen Kegelschnitte herausbildet (Sätze V, S. 91, V und VI, S. 98, V, S. 102). In ähnlicher Weise fällt die Focaleigenschaft des elliptischen Paraboloides in den beiden Hauptebenen auf die gewöhnliche Focaleigenschaft der Parabel zurück, während aus der des hyperbolischen Paraboloides wiederum eine zusammengesetzte Focaleigenschaft der Parabel (Satz V, S. 161) entspringt.

Durch die weitere Ausführung, welche die hiermit angedeuteten Beziehungen zwischen allgemeinen Flächen zweiter Ordnung einerseits und Rotationsflächen oder Kegelschnitten andererseits in den folgenden Blättern erfahren, hoffe ich bei dem Leser die Ueberzeugung zu erwecken, dass in den entwickelten Lehrsätzen die lange gesuchten*) Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung wirklich gefunden sind.

Rostock, Mai 1896.

Otto Staude.

*) In seinem Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, Bruxelles 1837, Note XXXI, § I, 29 sagt Chasles: Il est une propriété principale des coniques . . ., c'est que: „la somme ou la différence des rayons vecteurs menés d'un point d'une conique aux deux foyers est constante". Nous avons fait, pendant longtemps, des tentatives pour trouver quelque chose d'analogue dans les surfaces; mais sans obtenir aucun succès. Aussi désirons nous vivement que cette matière offre assez d'intérêt pour provoquer d'autres recherches. — Vgl. auch die Bemerkungen, welche Weierstrass der Mittheilung der Heilermann'schen Focaleigenschaften der Krümmungslinien der Flächen zweiter Ordnung in den Monatsberichten der Königl. Academie zu Berlin, Jahrg. 1858, S. 270, vorausschickt.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Die Focaleigenschaften der Ellipsoide und Hyperboloide.

Erstes Capitel.

Das System confocaler Ellipsoide und Hyperboloide.

Zweites Capitel.

Die elliptischen Coordinaten.

Drittes Capitel.

Focalkegel und Focallinien im confocalen System.

Viertes Capitel.

Die Theorie der gebrochenen Focaldistanzen.

Erster Abschnitt.

Die Focaleigenschaften der Ellipsoide und Hyperboloide.

Erstes Capitel.

Das System confocaler Ellipsoide und Hyperboloide.

§ 1. Begriff der Hauptbrennpunkte und Focalkegelschnitte.

Bedeuten x, y, z die Coordinaten eines laufenden Raumpunktes in Bezug auf ein rechtwinkliges Axensystem $Oxyz$ und A, B, C willkürliche reelle Constanten, so umfasst die Gleichung:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$$

alle möglichen *Ellipsoide, einschaligen und zweischaligen Hyperboloide**).

Durch die Voraussetzungen

$$(2) \qquad A \geqq B \geqq C, \quad A > 0$$

schliessen wir nur imaginäre Flächen aus und verfügen über die Lage der verbleibenden reellen Flächen in der Weise, dass die Grössenfolge ihrer *Halbaxenquadrate* A, B, C der Reihenfolge der Coordinatenaxen entspricht. Wir zeichnen dadurch die x-, y- und z-Axe des Coordinatensystems als *erste*, *zweite* und *dritte Hauptaxe*, die xy-, xz- und yz-Ebene als *erste*, *zweite* und *dritte Hauptebene* jeder Fläche (1) aus.

Die reellen Constanten:

$$(3) \qquad a = \sqrt{A}^{**}), \quad d = \sqrt{A - B}, \quad e = \sqrt{A - C},$$

welche den Bedingungen:

$$(4) \qquad a > 0, \quad 0 \leqq d \leqq e$$

*) Vgl. Lindemann, Vorlesungen über Geometrie unter besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch, Bd. II, Th. I (Leipzig 1891), S. 172.

**) Vgl. Anm. IV, 1.

unterliegen, haben für die Fläche folgende Bedeutung: $2a$ ist die Entfernung der stets reellen Schnittpunkte der Fläche mit der ersten Hauptaxe, $2d$ und $2e$ die Brennweiten der stets reellen Schnittcurven mit der ersten und zweiten Hauptebene. Wir nennen $2a$ die *Hauptaxenlänge*, $2d$ die *kleine* und $2e$ die *grosse Hauptbrennweite* der Fläche; ferner die auf der x-Axe beiderseits vom *Mittelpunkte* O gelegenen Punkte $x = \pm a$ (S, S') die *Scheitelpunkte*, $x = \pm d$ (B_0, B_0') die *inneren Hauptbrennpunkte* und $x = \pm e$ (C_0, C_0') die *äusseren Hauptbrennpunkte.*

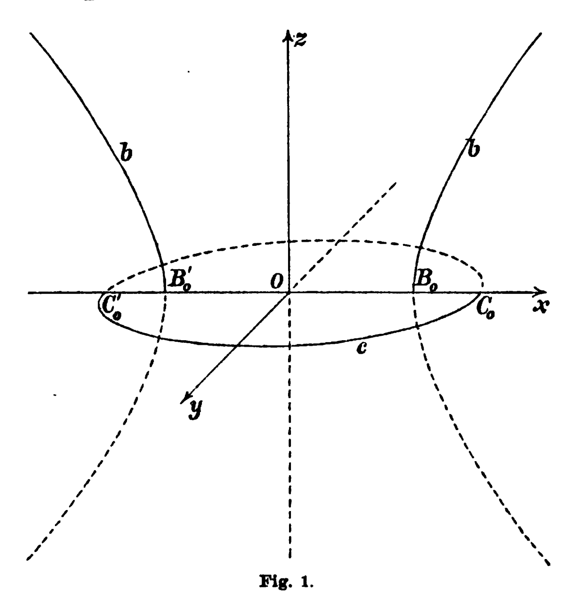


Fig. 1.

Mit den Hauptebenen und Hauptbrennpunkten sind die *Focalkegelschnitte* der Fläche (1) bestimmt, die Focalellipse c und die Focalhyperbel b (vgl. Fig. 1): *Die Focalellipse liegt in der ersten Hauptebene und hat die inneren Hauptbrennpunkte der Fläche als Brennpunkte und die äusseren als Scheitelpunkte. Die Focalhyperbel liegt in der zweiten Hauptebene und hat die äusseren Hauptbrennpunkte als Brennpunkte und die inneren als Scheitelpunkte.*

Die Gleichungen der Focalkegelschnitte c und b lauten daher:

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{A-C} + \dfrac{y^2}{B-C} = 1, \; z = 0 \\ \dfrac{x^2}{A-B} - \dfrac{z^2}{B-C} = 1, \; y = 0. \end{cases}$$

Jeder einzelne ihrer Punkte wird ein *Brennpunkt* oder *Focalpunkt* der Fläche (1) genannt. Die Hauptbrennpunkte sind ausgezeichnete Focalpunkte.

Die vorstehenden Benennungen und Definitionen sollen nicht blos für die allgemeinen, den Ungleichheitszeichen in (2) und (4) entsprechenden Flächen (1) gelten, sondern anch auf die speciellen Flächen, welche zu den dortigen Gleichheitszeichen gehören, übertragen werden.

Mit $B = A$ nimmt die Gleichung (1) die Form:

(1′) $$\frac{x^2 + y^2}{A} + \frac{z^2}{C} = 1$$

an, in der sie alle *abgeplatteten Rotationsellipsoide* und *einschaligen Rotationshyperboloide* umfasst*).

Für eine Fläche (1′) ist die *dritte Hauptaxe* als *Rotationsaxe* und die *erste Hauptebene* als *Aequatorebene* bestimmt, während als *zweite* und *dritte* Hauptebene zwei beliebige zu einander senkrechte *Meridianebenen* und als erste und zweite Hauptaxe deren Schnittlinien mit der Aequatorebene zu gelten haben. Die inneren Hauptbrennpunkte B_0, B_0' sind jetzt in den Mittelpunkt O gefallen (vgl. Fig. 1′), sodass aus der *Focalellipse*, deren Brennpunkte sie sind, ein in der Aequatorebene liegender Kreis:

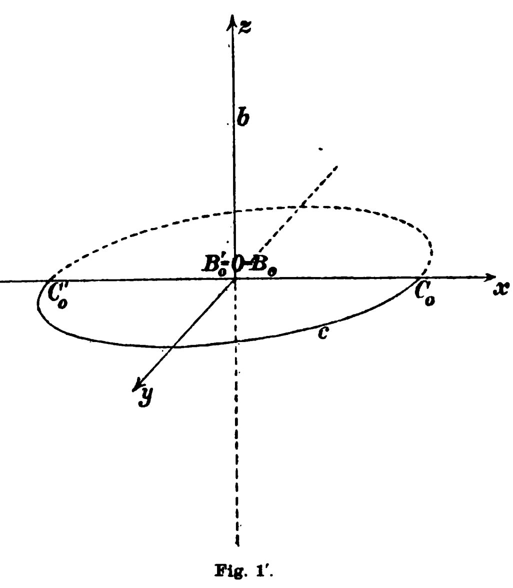


Fig. 1′.

(5′) $$\frac{x^2 + y^2}{A - C} = 1, \quad z = 0,$$

der *Focalkreis* c der Fläche (1′), geworden ist. Die *Focalhyperbel* hat sich, als Hyperbel mit verschwindender reeller Axe $2d$ und nicht verschwindender Brennweite $2e$ auf die z-Axe, die *Focalaxe* b der Fläche (1′), zusammengezogen. Sie liegt in jeder beliebigen Meridianebene, die als zweite Hauptebene gewählt sein mag. Als äussere Hauptbrennpunkte C_0, C_0' können irgend zwei diametrale Punkte des Focalkreises als Scheitelpunkte S, S' irgend zwei diametrale Punkte des Aequatorkreises der Fläche angesehen werden; $2a$ ist die *Hauptaxenlänge*, $2e$ die *Hauptbrennweite* der Fläche.

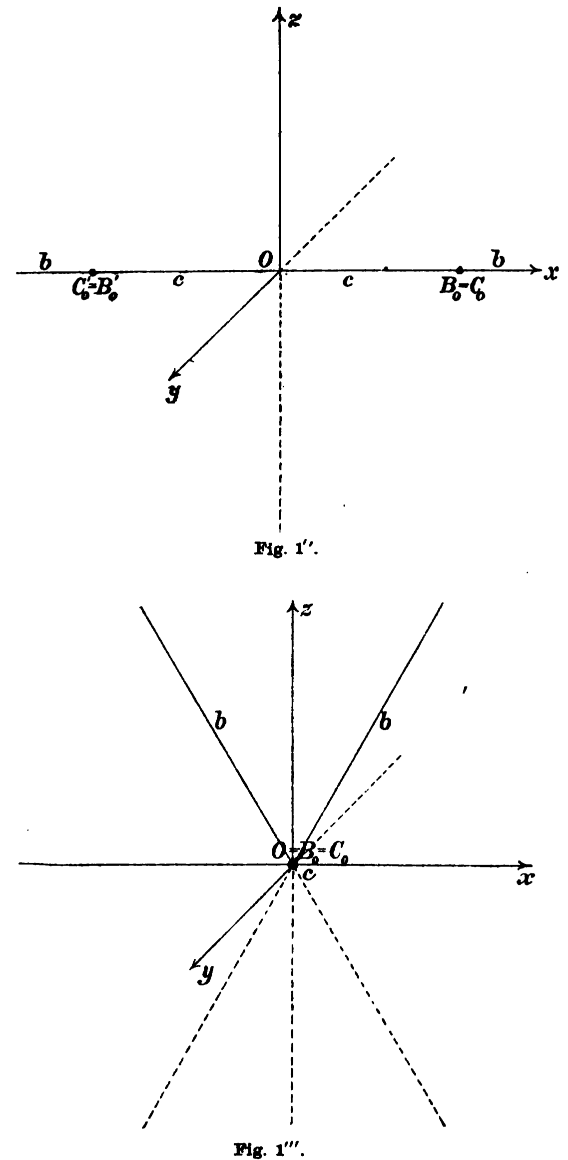
Mit $B = C$ nimmt die Gleichung (1) die Form:

(1″) $$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2 + z^2}{C} = 1$$

an, in welcher sie alle *verlängerten Rotationsellipsoide* und *zweischaligen Rotationshyperboloide* umfasst*). Für eine Fläche (1″) ist nur die *erste*

*) Vgl. Lindemann, a. a. O. S. 173, 174.

Hauptaxe als *Rotationsaxe* und die *dritte Hauptebene* als *Aequatorebene* bestimmt, während als *erste* und *zweite Hauptebene* zwei beliebige zu einander senkrechte *Meridianebenen* und als zweite und dritte Hauptaxe deren Schnittlinien mit der Aequatorebene zu gelten haben. Die inneren und äusseren Hauptbrennpunkte sind jetzt zu einem einzigen *Hauptbrennpunktpaar* $B_0 = C_0$, $B_0' = C_0'$ verschmolzen (vgl. Fig. 1''). Da in diesem auch Scheitel- und Brennpunkte der Kegelschnitte c und b vereinigt sind, ist die *Focalellipse* in das Stück der x-Axe zwischen den Punkten B_0 und B_0', die *Focalhyperbel* in die Stücke ausserhalb dieser Punkte hineingefallen. Die Flächen (1'') haben daher ein *inneres Focalaxenstück* c und ein *Paar äusserer Focalaxenstücke* b; $2a$ ist die *Hauptaxenlänge*, $2d = 2e$ die *Hauptbrennweite*.



Mit $C = B = A$ umfasst die Gleichung (1) in der Form:

$$(1''') \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{A} = 1$$

alle *Kugeln*. Für diese werden alle Hauptaxen und Hauptebenen unbestimmt und sind innere und äussere Hauptbrennpunkte im Mittelpunkte O vereinigt. Auch die *Focalellipse* hat sich auf den *Mittelpunkt* O concentrirt, die *Focalhyperbel* besteht als eine Hyperbel, deren Brennweite $2e$ verschwindet und deren Ebene eine beliebige Dia-

metralebene der Kugel ist, aus irgend zwei durch O gehenden, getrennten oder zusammenfallenden Geraden, einem *Focalaxenpaar* b (vgl. Fig. 1‴).

§ 2. Begriff und Arten der confocalen Systeme.

Die Gleichung (1) stellt ein System von dreifach unendlich vielen Flächen dar. Die einzelne Fläche ist durch die Werthe der drei den Bedingungen (2) unterworfenen willkürlichen Constanten A, B, C oder auch der drei den Ungleichungen 4) unterliegenden willkürlichen Constanten a, d, e charakterisirt.

Zwei Flächen a, d, e und a', d', e' des Systems heissen *confocal*, wenn $d = d'$ und $e = e'$ ist, also ihre kleinen und grossen Hauptbrennweiten bezüglich gleich sind. Zwei confocale Flächen des Systems haben daher dieselben inneren und dieselben äusseren Hauptbrennpunkte B_0, B_0' und C_0, C_0', wie auch dieselben Focalkegelschnitte b und c.

Die einfach unendlich vielen Flächen a', d, e, welche zu einer gegebenen Fläche a, d, e confocal sind, bilden ein *confocales System* d, e. Jede Fläche a, d, e des Systems (1) gehört einem und nur einem confocalen System d, e an.

Das System (1) enthält zweifach unendlich viele confocale Systeme d, e, theils *allgemeine*, für welche $0 < d < e$, theils *specielle*, für welche entweder $0 = d < e$ oder $0 < d = e$ oder $0 = d = e$ ist. Jedem System d, e ist ein Paar von Focalkegelschnitten, das Paar der gemeinsamen Focalkegelschnitte aller seiner Flächen, eigenthümlich.

Um die innerhalb eines confocalen Systems bewegliche Constante a gegen seine festen Constanten d und e (vgl. § 1, 3) auch durch eine entsprechende Bezeichnung hervorzuheben, ohne die Symmetrie der Gleichung (1) aufzugeben, setzen wir:

$$A = \alpha - \tau, \quad A - B = \alpha - \beta, \quad A - C = \alpha - \gamma.$$

Dadurch erhält die Gleichung (1) mit den Ungleichungen (2) die Form:

$$\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} = 1,$$
$$\alpha \geqq \beta \geqq \gamma, \quad \tau < \alpha,$$

und stellt jetzt bei festen Werthen der Differenzen $\alpha - \beta$ und $\alpha - \gamma$ und veränderlichem τ alle Flächen eines beliebigen confocalen Systems dar.

Für das *allgemeine confocale System*:

$$\text{(6)} \qquad \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} = 1, \quad \alpha > \beta > \gamma,$$

haben die inneren und äusseren Hauptbrennpunkte B_0, B_0' und C_0, C_0' die Coordinaten:

(7) $$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\alpha - \beta}, & y = 0, \quad z = 0, \\ x = \pm\sqrt{\alpha - \gamma}, & y = 0, \quad z = 0, \end{cases}$$

und die Focalkegelschnitte c und b (vgl. Fig. 1) die Gleichungen:

(8) $$\begin{cases} \frac{x^2}{\alpha-\gamma} + \frac{y^2}{\beta-\gamma} = 1, & z = 0 \\ \frac{x^2}{\alpha-\beta} + \frac{z^2}{\gamma-\beta} = 1, & y = 0. \end{cases}$$

Für das *erste specielle confocale System*:

(6′) $$\frac{x^2+y^2}{\alpha-\tau} + \frac{z^2}{\gamma-\tau} = 1, \quad \alpha > \gamma,$$

ist die Gleichung des Focalkreises c (vgl. Fig. 1′).

(8′) $$\frac{x^2+y^2}{\alpha-\gamma} = 1, \quad z = 0.$$

Für das *zweite specielle confocale System*:

(6″) $$\frac{x^2}{\alpha-\tau} + \frac{y^2+z^2}{\gamma-\tau} = 1, \quad \alpha > \gamma$$

sind die Coordinaten der Hauptbrennpunkte $B_0 = C_0$, $B_0' = C_0'$ (vgl. Fig. 1″):

(7″) $$x = \pm\sqrt{\alpha-\gamma}, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Für das *dritte specielle confocale System*:

(6‴) $$\frac{x^2+y^2+z^2}{\alpha-\tau} = 1$$

ist die Gleichung des Focalaxenpaares b (vgl. Fig. 1‴), mit drei willkürlichen Constanten α', β', γ' ($\alpha' > \beta' > \gamma'$) dargestellt:

(8‴) $$\frac{x^2}{\alpha'-\beta'} + \frac{z^2}{\gamma'-\beta'} = 0, \quad y = 0.$$

§ 3. Lage der Hauptbrennpunkte und Focalkegelschnitte gegen Scheitelpunkte und Hauptschnitte.

Um für die Gleichung (6) die Werthe $\tau = \alpha, \beta, \gamma$ nicht ausschliessen zu müssen, ersetzen wir sie durch die für alle übrigen Werthe von τ mit ihr gleichbedeutende Gleichung:

(9) $$(\alpha-\tau)(\beta-\tau)(\gamma-\tau)\left\{\frac{x^2}{\alpha-\tau} + \frac{y^2}{\beta-\tau} + \frac{z^2}{\gamma-\tau} - 1\right\} = 0.$$

Dadurch werden die *Doppelebenen* $x^2 = 0$, $y^2 = 0$, $z^2 = 0$, den Werthen $\tau = \alpha, \beta, \gamma$ entsprechend, als *uneigentliche* Flächen des confocalen Systems in dieses eingeführt (vgl. Anm. III, 1).

Jede andere, *eigentliche* Fläche τ des Systems ist ein Ellipsoid oder einschaliges oder zweischaliges Hyperboloid, jenachdem

(10) $$-\infty < \tau < \gamma \text{ oder } \gamma < \tau < \beta \text{ oder } \beta < \tau < \alpha,$$

bezüglich:

$$+\infty > \alpha - \tau > \alpha - \gamma \quad \text{oder} \quad \alpha - \gamma > \alpha - \tau > \alpha - \beta$$
$$\text{oder } \alpha - \beta > \alpha - \tau > 0,$$

jenachdem also nach (7) die Scheitelpunkte S, S' der Fläche auf der ersten Hauptaxe ausserhalb der äusseren Hauptbrennpunkte C_0, C_0' oder zwischen diesen und den inneren Hauptbrennpunkten B_0, B_0' oder innerhalb der letzteren liegen. Da nun jedes allgemeine Ellipsoid oder Hyperboloid einem und nur einem confocalen System angehört (vgl. § 2), so gilt der Satz:

I. *Bei dem Ellipsoid liegen auf der ersten Hauptaxe inneres und äusseres Hauptbrennpunktpaar innerhalb der Scheitelpunkte, bei dem einschaligen Hyperboloid ist dieses von jenem durch die Scheitelpunkte getrennt, bei dem zweischaligen Hyperboloid befinden sich beide Paare ausserhalb der Scheitelpunkte.*

Das Ellipsoid schneidet auch die zweite und dritte, das einschalige Hyperboloid auch die zweite Hauptaxe in reellen Punkten.

Das einschalige Hyperboloid des confocalen Systems, dessen Parameter τ der Bedingung genügt:

$$\sqrt{\alpha - \tau} = \frac{\sqrt{\alpha - \gamma} + \sqrt{\alpha - \beta}}{2},$$

dessen Scheitelpunkte S, S' also je in die Mitte zwischen einem äusseren und einem inneren Hauptbrennpunkt fallen, heisst *gleichseitiges einschaliges Hyperboloid.*

Nach den Schnittpunkten der Flächen des confocalen Systems mit den Hauptaxen betrachten wir die Schnittcurven mit den Hauptebenen.

Die Schnittcurven der Flächen (9) *mit der ersten Hauptebene* $z = 0$:

(9,z) $$(\alpha - \tau)\,(\beta - \tau)\,(\gamma - \tau)\left\{\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} - 1\right\} = 0$$

bilden ein System confocaler Kegelschnitte, deren gemeinsame Brennpunkte die gemeinsamen inneren Hauptbrennpunkte B_0, B_0' der Flächen (9) sind (vgl. § 2, 7 u. Anm. I, 1; 2). Während nun die Hyperbeln dieses Systems (9,z), für $\beta < \tau < \alpha$, von den zweischaligen Hyperboloiden und seine Doppelgeraden $y^2 = 0$ und $x^2 = 0$ (vgl. Anm. I, 2), für $\tau = \beta$ und $\tau = \alpha$, von den gleichbezeichneten Doppelebenen des Systems (9) erzeugt werden, rühren seine Ellipsen theils, für $-\infty < \tau < \gamma$, von den Ellipsoiden, theils, für $\gamma < \tau < \beta$, von den einschaligen Hyperboloiden unter (9) her (vgl. Fig. 2, wo für einen Quadranten jeder Hauptebene die Schnittcurven der Ellipsoide

ausgezogen, die der einschaligen Hyperboloide gestrichelt, die der zweischaligen punktirt dargestellt sind). Dabei bleibt unter den Ellipsen eine Lücke, dem Werthe $\tau = \gamma$ entsprechend, für den die Gleichung (9,z) ihre Bedeutung verliert. Dieser Umstand findet seine Erklärung

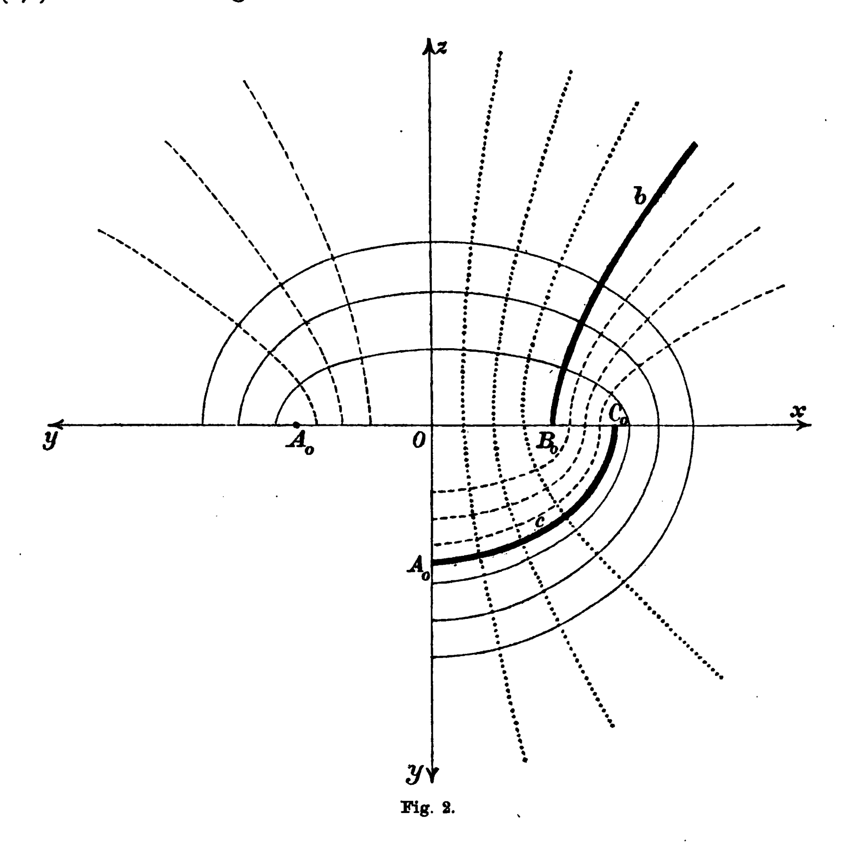


Fig. 2.

in der Theorie der Schnittcurvenenveloppe*) des Systems (9). Die dieser Enveloppe angehörige Curve nämlich, in welcher eine beliebige Fläche τ des Systems von einer ihr unendlich benachbarten geschnitten wird, ist durch die beiden Gleichungen:

$$G(\tau) = (\beta - \tau)(\gamma - \tau)x^2 + (\gamma - \tau)(\alpha - \tau)y^2 + \\ + (\alpha - \tau)(\beta - \tau)z^2 - (\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau) = 0$$

$$G'(\tau) = -(\beta - \tau + \gamma - \tau)x^2 - (\gamma - \tau + \alpha - \tau)y^2 - (\alpha - \tau + \\ + \beta - \tau)z^2 + (\beta - \tau)(\gamma - \tau) + (\gamma - \tau)(\alpha - \tau) + (\alpha - \tau)(\beta - \tau) = 0$$

*) Vgl. Monge, Application de l'analyse à la géométrie, 5ième éd., Paris 1850, S. 32; Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, Th. II, 3. Aufl., Leipzig 1880, S. 103.

dargestellt, wo $G'(\tau)$ der Differentialquotient der ganzen Function $G(\tau)$ nach τ ist. Aus ihnen gehen mit $\tau=\gamma$ die Gleichungen:

$$z^2=0, \quad (\beta-\gamma)x^2+(\alpha-\gamma)y^2-(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)=0$$

einer Ellipse hervor, in welcher die Doppelebene $\tau=\gamma$ des Systems (9) von einer ihr unendlich benachbarten Fläche geschnitten wird. Diese Ellipse ist nach § 2, 8 die Focalellipse c des confocalen Systems (9). Indem sie die Schnittcurve der uneigentlichen Fläche $\tau=\gamma$ mit der xy-Ebene vertritt, füllt sie die erwähnte Lücke unter den Ellipsen des Systems $(9,z)$ aus. Sie wird von den ersten Hauptschnitten der Ellipsoide umschlossen (vgl. Fig. 2) und umschliesst ihrerseits die der einschaligen Hyperboloide*). Durch den Factor $(\gamma-\tau)$, welcher die besondere Rolle der Focalellipse bezeichnet, unterscheidet sich das confocale System $(9,z)$ von dem gewöhnlichen System confocaler Ellipsen und Hyperbeln (vgl. Anm. I, 2, 9^0).

Die Schnittcurven der Flächen (9) *mit der zweiten Hauptebene* $y=0$

$$(9,y) \qquad (\alpha-\tau)(\beta-\tau)(\gamma-\tau)\left\{\frac{x^2}{\alpha-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}-1\right\}=0$$

bilden ein System confocaler Kegelschnitte, deren gemeinsame Brennpunkte die gemeinsamen äusseren Hauptbrennpunkte C_0, C_0' der Flächen (9) sind (vgl. § 2, 7 und Anm. I, 1; 2). Die Ellipsen dieses Systems $(9,y)$, für $-\infty<\tau<\gamma$, rühren von den Ellipsoiden des Systems (9), seine Hyperbeln aber theils, für $\gamma<\tau<\beta$, von den einschaligen, theils, für $\beta<\tau<\alpha$, von den zweischaligen Hyperboloiden her (vgl. Fig. 2). Ausserdem fügt sich in demselben Sinne wie vorhin die Focalellipse c, jetzt die Focalhyperbel b, dem Werthe $\tau=\beta$ entsprechend, in das System $(9,y)$ ein. Sie wendet den zweiten Hauptschnitten der einschaligen Hyperboloide ihre concave, denen der zweischaligen ihre convexe Seite zu.

In der dritten Hauptebene $x=0$ bilden *die Schnittcurven:*

$$(9,x) \qquad (\alpha-\tau)(\beta-\tau)(\gamma-\tau)\left\{\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}-1\right\}=0$$

wiederum ein System confocaler Kegelschnitte, deren gemeinsame Brennpunkte A_0, A_0' (vgl. Anm. I, 1, 7^0) die Coordinaten:

$$x=0, \quad y=\pm\sqrt{\beta-\gamma}, \quad z=0$$

haben und nach § 2, 8 die Scheitelpunkte der kleinen Axe der Focalellipse c sind (vgl. Fig. 2). Die Ellipsen dieses Systems, für $-\infty<\tau<\gamma$, werden von den Ellipsoiden und seine Hyperbeln, für $\gamma<\tau<\beta$, von den einschaligen Hyperboloiden (9) hervorgebracht.

*) Vgl. Dupin, Développements de géométrie, Paris 1813, S. 277.

Dagegen liefern weder die zweischaligen Hyperboloide noch die Doppelebene $\nu = \alpha$ zu ihm einen Beitrag.

Während nach dem Vorstehenden bei allen eigentlichen Flächen des confocalen Systems (9) *der erste und zweite Hauptschnitt mit der Focalellipse c und Focalhyperbel b bezüglich confocal ist,* ist für die Art der einzelnen Fläche die Lagebeziehung zwischen Hauptschnitt und gleichartigem (bezüglich seiner Art als Ellipse oder Hyperbel) Focalkegelschnitt in ähnlicher Weise charakteristisch (vgl. Fig. 2), wie die unter § 3, I bezeichnete Lagebeziehung zwischen Scheitelpunkten und Hauptbrennpunkten:

II. *Die Focalellipse liegt beim Ellipsoid innerhalb, beim einschaligen Hyperboloid ausserhalb des gleichartigen ersten Hauptschnittes; die Focalhyperbel liegt beim einschaligen Hyperboloid auf der convexen, beim zweischaligen Hyperboloid auf der concaven Seite des gleichartigen zweiten Hauptschnittes.*

Indem wir auch die Gleichungen (6′) und (6″) der speciellen confocalen Systeme in die mit (9) analogen Formen:

$$(9') \qquad (\alpha - \tau)(\gamma - \tau)\left\{\frac{x^2 + y^2}{\alpha - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} - 1\right\} = 0$$

$$(9'') \qquad (\alpha - \tau)(\gamma - \tau)\left\{\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2 + z^2}{\gamma - \tau} - 1\right\} = 0$$

versetzen (vgl. jedoch § 5, Anfang), werden in das erstere, für $\tau = \gamma$, die Doppelebene $z^2 = 0$ und, für $\tau = \alpha$, die Doppelaxe (das imaginäre Ebenenpaar): $x^2 + y^2 = 0$, in das letztere, für $\tau = \gamma$, die Doppelaxe $y^2 + z^2 = 0$ und, für $\tau = \alpha$, die Doppelebene $x^2 = 0$ aufgenommen.

Beide Systeme entstehen durch Rotation des Systems confocaler Kegelschnitte (vgl. Anm. I, 2, 9^0):

$$(9_0) \qquad (\alpha - \tau)(\gamma - \tau)\left\{\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} - 1\right\} = 0$$

(vgl. Fig. 3) um die z-Axe, beziehungsweise um die x-Axe. Der Focalkreis (8′) des Systems (9′) wird bei der Rotation um die z-Axe von den Brennpunkten C_0, C_0' des Systems (9_0) beschrieben, während die Hauptbrennpunkte (7″) des Systems (9″) mit den bei der Rotation um die x-Axe fest bleibenden Brennpunkten des Systems (9_0) zusammenfallen. Für die Lage der Hauptbrennpunkte und Focalkegelschnitte gegen Scheitelpunkte und Hauptschnitte gelten *auch bei den jetzt vorliegenden Rotationsflächen im Wesentlichen die beiden Sätze* I *und* II.

Was nämlich das System (9′) betrifft, so entstehen seine abgeplatteten Rotationsellipsoide und einschaligen Rotationshyperboloide bezüglich für:

$$(10') \qquad -\infty < \tau < \gamma \quad \text{und} \quad \gamma < \tau < \alpha$$

aus den Ellipsen und Hyperbeln des Systems (9_0). Auf der x-Axe, wie auf jeder beliebigen Axe der Aequatorebene, liegen daher bei den Rotationsellipsoiden die Scheitel S, S' ausserhalb der äusseren Hauptbrennpunkte C_0, C_0', bei den Rotationshyperboloiden innerhalb. Das confocale System (9_0) stellt zugleich den Durchschnitt des Systems $(9')$ mit der xz-Ebene, wie mit jeder beliebigen Meridianebene dar, und es liegt die Focalaxe b (vgl. Fig. 1′) auf der convexen Seite der Meridianschnitte der einschaligen Rotationshyperboloide. Dagegen wird die xy-Ebene von den Flächen $(9')$ in einem System concentrischer Kreise geschnitten, welche von den Ellipsoiden oder Hyperboloiden herrühren, jenachdem sie ausserhalb oder innerhalb des Focalkreises c (vgl. Fig. 1′) liegen.

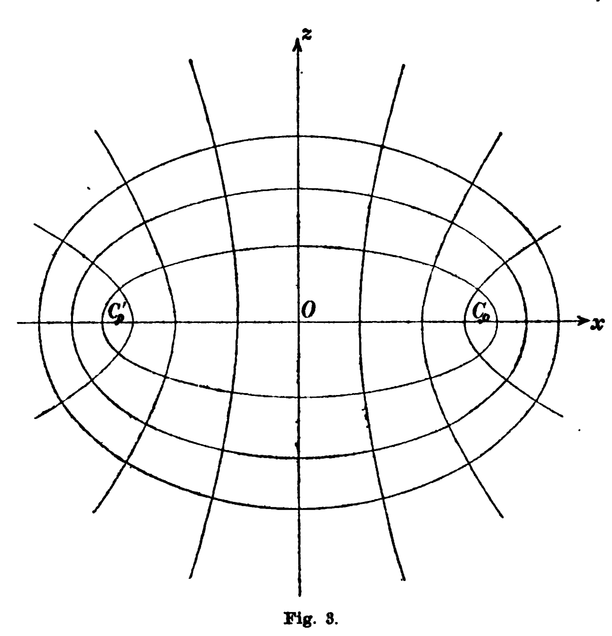


Fig. 3.

Bei dem System $(9'')$ entstehen die verlängerten Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide bezüglich für:

$$(10'') \qquad -\infty < \tau < \gamma \quad \text{und} \quad \gamma < \tau < \alpha$$

aus den Ellipsen und Hyperbeln des Systems (9_0) und entsprechen daher wiederum dem Satze I. Aber auch in Uebereinstimmung mit Satz II liegt in der xz-Ebene, wie in jeder Meridianebene, das innere Focalaxenstück c innerhalb des Meridianschnittes der Ellipsoide und die äusseren Focalaxenstücke b (vgl. Fig. 1″) auf der concaven Seite des Meridianschnittes der zweischaligen Hyperboloide.

Das dritte specielle confocale System $(6''')$, in der Form:

$$(9''') \qquad (\alpha - \tau)\left\{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\alpha - \tau} - 1\right\} = 0$$

dargestellt, ist ein System concentrischer Kugeln, einschliesslich einer Kugel vom Radius 0 für $\tau = \alpha$.

§ 4. Die drei Flächenschaaren des allgemeinen confocalen Systems.

Um die verschiedenen Arten der Flächen eines confocalen Systems auch durch eine verschiedene Bezeichnung auseinander zu halten, *bezeichnen wir den Parameter τ des Systems für die Ellipsoide mit λ, für die einschaligen Hyperboloide mit μ, für die zweischaligen Hyperboloide mit ν.*

Bei dem allgemeinen System (9) ist dann nach (10) zunächst für die eigentlichen Flächen:

$$-\infty < \lambda < \gamma, \quad \gamma < \mu < \beta, \quad \beta < \nu < \alpha;$$

wir reihen aber auch die uneigentlichen Flächen $\tau = \gamma, \beta, \alpha$ des Systems getheilt oder ungetheilt unter die drei Arten λ, μ, ν ein. Bewegt sich nämlich der Parameter λ des laufenden Ellipsoides gegen den Werth γ, so nähert sich nach der Theorie der confocalen Kegelschnittsysteme $(9, z)$, $(9, y)$ und $(9, x)$ in § 3 (vgl. Anm. I, 3, 12⁰) der erste Hauptschnitt der Fläche von aussen her der Focalellipse (vgl. Fig. 2), der zweite dem Stücke $C_0 C_0'$ der x-Axe und der dritte dem Stücke $A_0 A_0'$ der y-Axe. Das Ellipsoid λ zieht sich also von allen Seiten her gegen das von der Focalellipse c eingeschlossene Gebiet der xy-Ebene zusammen (vgl. Fig. 4, wo unter der Bezeichnung $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ drei im Sinne des wachsenden λ aufeinanderfolgende Ellipsoide durch ihre Hauptschnitte in einem Quadranten jeder Coordinatenebene dargestellt sind). Daher bildet der der Ungleichung

$$\frac{x^2}{\alpha - \gamma} + \frac{y^2}{\beta - \gamma} \leqq 1$$

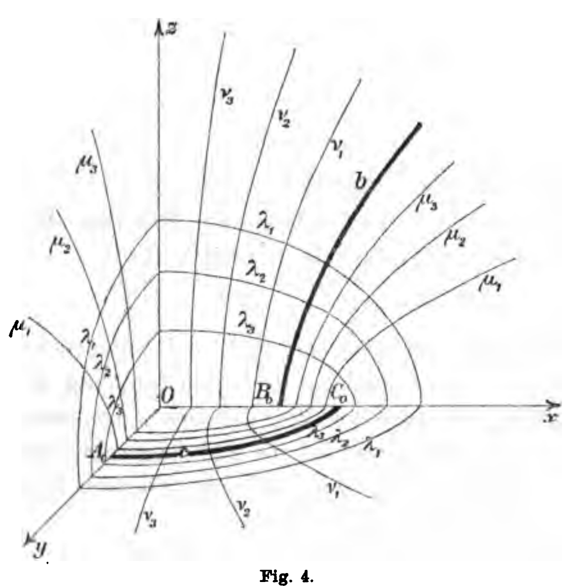


Fig. 4.

entsprechende Theil der Doppelebene $z^2 = 0$, dessen zwei congruente von der Focalellipse c begrenzte Blätter wir uns etwa längs dieser Curve miteinander verwachsen denken, die *innere Grenzform $\lambda = \gamma$ des laufenden Ellipsoides λ* im System (9). In gleichem Sinne stellt der von der Focalellipse ausgeschlossene, der Ungleichung:

$$\frac{x^2}{\alpha-\gamma}+\frac{y^2}{\beta-\gamma}\geqq 1$$

entsprechende Theil der Doppelebene $z^2=0$ die eine *Grenzform* $\mu=\gamma$ *des laufenden einschaligen Hyperboloides* μ dar. Denn dieses nähert sich, wenn μ gegen γ hin abnimmt, von allen Seiten her dem ausserhalb der Focalellipse liegenden Theile der xy-Ebene (vgl. die in Fig. 4 dargestellten einschaligen Hyperboloide in der Reihenfolge μ_3, μ_2, μ_1). In entgegengesetzter Richtung (vgl. Fig. 4, μ_1, μ_2, μ_3), wenn μ gegen β hin wächst, zieht sich das einschalige Hyperboloid μ von allen Seiten her gegen das auf der convexen Seite der Focalhyperbel b liegende Gebiet der xz-Ebene zusammen, welches somit, von zwei ebenen, längs der Curve selbst verwachsenen Blättern bedeckt, als andere *Grenzform* $\mu=\beta$ *des einschaligen Hyperboloides* erscheint. Das übrig bleibende, auf der concaven Seite der beiden Hyperbelzweige b liegende Gebiet der Doppelebene $y^2=0$ ist in derselben Auffassung die eine *Grenzform* $\nu=\beta$ *des laufenden zweischaligen Hyperboloides* ν, bei gegen β abnehmendem ν (vgl. Fig. 4, ν_3, ν_2, ν_1). Bewegt sich ν gegen α hin, so nähern sich die beiden Schalen des zweischaligen Hyperboloides (vgl. Fig. 4, ν_1, ν_2, ν_3) von beiden Seiten her der yz-Ebene, welche, doppelt überdeckt, die andere *Grenzform* $\nu=\alpha$ *des zweischaligen Hyperboloides* bildet.

Hiermit ist von der Doppelebene $\tau=\gamma$ des Systems (9) der Theil innerhalb der Focalellipse als Ellipsoid $\lambda=\gamma$ und der Theil ausserhalb als einschaliges Hyperboloid $\mu=\gamma$ benannt, von der Doppelebene $\tau=\beta$ der Theil auf der convexen Seite der Focalhyperbel als einschaliges Hyperboloid $\mu=\beta$, der Theil auf der concaven Seite als zweischaliges Hyperboloid $\nu=\beta$ bezeichnet, die Doppelebene $\tau=\alpha$ aber ungetheilt den zweischaligen Hyperboloiden zugerechnet. Die Parameter der 3 Flächenschaaren entsprechen daher nunmehr den Ungleichungen:

$$(11)\qquad -\infty\leqq\lambda\leqq\gamma,\quad \gamma\leqq\mu\leqq\beta,\quad \beta\leqq\nu\leqq\alpha.$$

Um noch die Bedeutung des Werthes $\lambda=-\infty$ festzustellen, machen wir die Gleichung (9) sowohl in den Coordinaten als in dem Parameter homogen, indem wir $x:p$, $y:p$, $z:p$, $\tau:\sigma$ für x, y, z, τ setzen und mit $p^2\sigma^3$ multipliciren. Sie lautet daher in homogenen Punktcoordinaten x, y, z, p*) und homogenen Parametern τ, σ:

$$(9,\infty)\ (\beta\sigma-\tau)(\gamma\sigma-\tau)\sigma x^2+(\gamma\sigma-\tau)(\alpha\sigma-\tau)\sigma y^2+ \\ +(\alpha\sigma-\tau)(\beta\sigma-\tau)\sigma z^2-(\alpha\sigma-\tau)(\beta\sigma-\tau)(\gamma\sigma-\tau)p^2=0.$$

*) Vgl. Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, 3. Aufl. (Leipzig 1876), Vorl. VI, S. 67.

Hieraus geht hervor, dass den Werthen $\tau, \sigma = \tau, 0$ der homogenen Parameter die Fläche $p^2 = 0$, die doppelte unendlich ferne Ebene zugehört. Der entsprechende unendliche Werth des nicht homogenen Parameters τ schliesst sich als $\lambda = -\infty$ an die der Ungleichung $-\infty < \lambda < \gamma$ entsprechenden Parameterwerthe der eigentlichen Ellipsoide an.

I. *Das allgemeine confocale System* (9) *zerfällt somit in drei Schaaren je gleichnamiger Flächen, deren Parameterwerthe und Gleichungen, bezüglich Ungleichungen die folgende Tabelle enthält:*

(12) *Ellipsoide:*

$$\lambda = -\infty : \; p^2 = 0,$$

$$-\infty < \lambda < \gamma : \; \frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\beta - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} = 1,$$

$$\lambda = \gamma : \; \frac{x^2}{\alpha - \gamma} + \frac{y^2}{\beta - \gamma} \leqq 1, \; z^2 = 0.$$

Einschalige Hyperboloide:

$$\mu = \gamma : \; \frac{x^2}{\alpha - \gamma} + \frac{y^2}{\beta - \gamma} \geqq 1, \; z^2 = 0,$$

$$\gamma < \mu < \beta : \; \frac{x^2}{\alpha - \mu} + \frac{y^2}{\beta - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} = 1,$$

$$\mu = \beta : \; \frac{x^2}{\alpha - \beta} + \frac{z^2}{\gamma - \beta} \leqq 1, \; y^2 = 0.$$

Zweischalige Hyperboloide:

$$\nu = \beta : \; \frac{x^2}{\alpha - \beta} + \frac{z^2}{\gamma - \beta} \geqq 1, \; y^2 = 0,$$

$$\beta < \nu < \alpha : \; \frac{x^2}{\alpha - \nu} + \frac{y^2}{\beta - \nu} + \frac{z^2}{\gamma - \nu} = 1,$$

$$\nu = \alpha : \; x^2 = 0.$$

Diese Eintheilung der Flächen des confocalen Systems ist von Wichtigkeit für die Frage, welche von ihnen durch einen gegebenen Punkt x, y, z des Raumes hindurchgehen. Das hängt davon ab, wie viele von den drei Wurzeln der Gleichung (9), deren linke Seite eine ganze Function $G(\tau)$ dritten Grades in τ ist, reell sind und zwischen welchen Grenzen sie liegen.

Befindet sich der gegebene Punkt mit $x \cdot y \cdot z \neq 0$ ausserhalb der drei Hauptebenen, so ist

$$G(-\infty) = -\infty < 0, \quad G(\gamma) = (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) z^2 > 0,$$
$$G(\beta) = (\gamma - \beta)(\alpha - \beta) y^2 < 0, \quad G(\alpha) = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) x^2 > 0,$$

sodass die Gleichung (9) drei reelle Wurzeln liefert, welche zwischen den Grenzen $-\infty$ und γ, γ und β, β und α gelegen und daher

nach (11) mit λ, μ, ν zu bezeichnen sind. Demnach geht durch den Punkt x, y, z je eine eigentliche Fläche aus jeder der drei Schaaren (12) hindurch.

Liegt der gegebene Punkt mit $z=0$, $x \cdot y \neq 0$ in der ersten Hauptebene, so hat die Gleichung (9), jetzt von der Form:

$$G(\tau) = (\gamma - \tau) G_1(\tau) = 0, \quad G_1(\tau) = (\alpha - \tau)(\beta - \tau)\left\{\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} - 1\right\},$$

zuerst die Wurzel $\tau = \gamma$. Ihre beiden anderen Wurzeln sind die der Gleichung $G_1(\tau) = 0$. Da nun:

$$G_1(-\infty) < 0, \quad G_1(\gamma) = (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)\left\{\frac{x^2}{\alpha - \gamma} + \frac{g^2}{\beta - \gamma} - 1\right\},$$

$$G_1(\beta) = (\alpha - \beta) y^2 > 0, \quad G_1(\alpha) = (\beta - \alpha) x^2 < 0,$$

so befindet sich die eine der beiden letztgenannten Wurzeln jedenfalls zwischen β und α. Die andere aber ist entweder zwischen γ und β oder zwischen $-\infty$ und γ eingeschlossen oder selbst γ, jenachdem $G_1(\gamma) < 0$ oder > 0 oder $= 0$ ist, jenachdem also nach (12) der Punkt x, y, 0 auf der Grenzfläche $\lambda = \gamma$ oder auf der Grenzfläche $\mu = \gamma$ oder auf der gemeinsamen Grenze beider, der Focalellipse, liegt. Durch den Punkt gehen darnach, ausser einem eigentlichen zweischaligen Hyperboloid ν, im ersten Falle das Ellipsoid $\lambda = \gamma$, jener ersten Wurzel der Gleichung $G(\tau) = 0$ entsprechend, und ein eigentliches einschaliges Hyperboloid μ, im zweiten Falle ein eigentliches Ellipsoid λ und, jener ersten Wurzel $\tau = \gamma$ entsprechend, das einschalige Hyperboloid $\mu = \gamma$, im dritten Falle, der Doppelwurzel $\tau = \gamma$ der Gleichung (9) entsprechend, das Ellipsoid $\lambda = \gamma$ und das einschalige Hyperboloid $\mu = \gamma$, auf jeden Fall je eine Fläche aus jeder der drei Schaaren (12).

In derselben Weise erledigt sich die gestellte Frage für die beiden anderen Hauptebenen und für die Hauptaxen. Um sie schliesslich für die unendlich ferne Ebene zu beantworten, müssen wir uns der Gleichung (9,∞) an Stelle von (9) bedienen. Sie liefert, als Gleichung 3. Grades in $\tau : \sigma$ bei gegebenen x, y, z, p betrachtet, für Punkte $p = 0$ zuerst die Wurzel $\sigma = 0$, nicht homogen $\tau = \lambda = -\infty$, und ferner zwei Wurzeln, welche der quadratischen Gleichung:

$$(\beta\sigma - \tau)(\gamma\sigma - \tau)x^2 + (\gamma\sigma - \tau)(\alpha\sigma - \tau)y^2 + (\alpha\sigma - \tau)(\beta\sigma - \tau)z^2 = 0$$

zu entnehmen sind. Da dieser durch $\sigma = 0$ nicht mehr genügt wird, kann sie wieder in der nicht homogenen Form:

$$(\beta - \tau)(\gamma - \tau)x^2 + (\gamma - \tau)(\alpha - \tau)y^2 + (\alpha - \tau)(\beta - \tau)z^2 = 0$$

geschrieben werden und hat dann eine Wurzel $\tau = \mu$ zwischen γ und β und eine Wurzel $\tau = \nu$ zwischen β und α.

Zusammenfassend erhalten wir den allgemein giltigen Satz:

II. *Durch jeden Punkt* x, y, z *des Raumes gehen drei im Sinne der Tabelle* (12) *ungleichnamige Flächen, deren Parameter* λ, μ, ν *die Wurzeln der in* τ *kubischen Gleichung* (9) *sind.*

Die der Bezeichnung nach immer verschiedenen Wurzeln λ, μ, ν der Gleichung (9) sind für alle Punkte ausserhalb der Focalkegelschnitte stets auch dem Werthe nach verschieden, während *für alle Punkte der Focalellipse* $c: \lambda = \gamma, \mu = \gamma$ *und für alle Punkte der Focalhyperbel* $b: \mu = \beta, \nu = \beta$ ist. Daher sind auch die beiden Focalkegelschnitte die einzigen reellen Bestandtheile der in § 3 erwähnten Schnittcurvenenveloppe des Systems (9).

§ 5. Die drei Flächenschaaren der speciellen confocalen Systeme.

Lassen wir die Gleichungen (9′), (9″) oder (9‴) in § 3 mit den Annahmen $\beta = \alpha$, $\beta = \gamma$ oder $\gamma = \beta = \alpha$ aus der Gleichung (9) hervorgehen, so fällt in dieser der Factor $\alpha - \tau$, $\gamma - \tau$ oder $(\alpha - \tau)^2$ aus. Gleichzeitig verschwindet in der Tabelle (12) für $\beta = \alpha$ die Schaar der zweischaligen Hyperboloide, indem für ihren Parameter ν zwischen β und α kein Spielraum mehr bleibt. Ebenso gehen für $\beta = \gamma$ die Schaar der einschaligen Hyperboloide und für $\gamma = \beta = \alpha$ die beiden Schaaren der Hyperboloide verloren. Dieser Verlust lässt sich durch einen geeigneten Grenzübergang vermeiden*), wenn auf eine allen drei Flächenschaaren λ, μ, ν gemeinsame Gleichungsform verzichtet wird.

Wir setzen zu dem Ende für das erste specielle confocale System nicht direct $\beta = \alpha$, sondern zunächst:

(13′) $$\alpha = \alpha + \varepsilon\alpha', \quad \beta = \alpha + \varepsilon\beta',$$

wo ε eine kleine positive Grösse, α' und β' zwei neue Constanten ($\alpha' > \beta'$) seien, und führen zugleich mit:

(13′) $$\nu = \alpha + \varepsilon\nu',$$

statt ν einen neuen Parameter ν' ein. Dadurch erhält die Tabelle (12) die Form:

$$-\infty < \lambda < \gamma: \frac{x^2}{\alpha + \varepsilon\alpha' - \lambda} + \frac{y^2}{\alpha + \varepsilon\beta' - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} = 1,$$

$$\lambda = \gamma: \frac{x^2}{\alpha + \varepsilon\alpha' - \gamma} + \frac{y^2}{\alpha + \varepsilon\beta' - \gamma} \leqq 1, \quad z^2 = 0,$$

$$\mu = \gamma: \frac{x^2}{\alpha + \varepsilon\alpha' - \gamma} + \frac{y^2}{\alpha + \varepsilon\beta' - \gamma} \geqq 1, \quad z^2 = 0,$$

*) Vgl. Lindemann, a. § 1 a. O., S. 273—276.

$$\gamma < \mu < \alpha + \varepsilon\beta' : \frac{x^2}{\alpha + \varepsilon\alpha' - \mu} + \frac{y^2}{\alpha + \varepsilon\beta' - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} = 1,$$

$$\mu = \alpha + \varepsilon\beta' : \frac{x^2}{\alpha' - \beta'} + \frac{\varepsilon z^2}{\gamma - \alpha - \varepsilon\beta'} \leqq \varepsilon, \quad y^2 = 0,$$

$$\nu' = \beta' : \frac{x^2}{\alpha' - \beta'} + \frac{\varepsilon z^2}{\gamma - \alpha - \varepsilon\beta'} \geqq \varepsilon, \quad y^2 = 0,$$

$$\beta' < \nu' < \alpha' : \frac{x^2}{\alpha' - \nu'} + \frac{y^2}{\beta' - \nu'} + \frac{\varepsilon z^2}{\gamma - \alpha - \varepsilon\nu'} = \varepsilon.$$

Bei unbegrenzt abnehmendem ε nähert sich daher die Tabelle (12) der folgenden Grenzform, wobei wir zu beachten haben, dass die Ungleichung $\frac{x^2}{\alpha' - \beta'} \leqq 0$ nur als Gleichung $x^2 = 0$ bestehen kann, die Ungleichung $\frac{x^2}{\alpha' - \beta'} \geqq 0$ aber als trivial bei Seite zu lassen ist:

(12′) *Abgeplattete Rotationsellipsoide.*

$$\lambda = -\infty : p^2 = 0,$$

$$-\infty < \lambda < \gamma : \frac{x^2 + y^2}{\alpha - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} = 1,$$

$$\lambda = \gamma : \frac{x^2 + y^2}{\alpha - \gamma} \leqq 1, \quad z^2 = 0.$$

Einschalige Rotationshyperboloide.

$$\mu = \gamma : \frac{x^2 + y^2}{\alpha - \gamma} \geqq 1, \quad z^2 = 0,$$

$$\gamma < \mu < \alpha : \frac{x^2 + y^2}{\alpha - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} = 1,$$

$$\mu = \alpha : x^2 = 0, \quad y^2 = 0.$$

Meridianebenenpaare.

$$\nu' = \beta' : y^2 = 0,$$

$$\beta' < \nu' < \alpha' : \frac{x^2}{\alpha' - \nu'} + \frac{y^2}{\beta' - \nu'} = 0,$$

$$\nu' = \alpha' : x^2 = 0.$$

Die beiden ersten Flächenschaaren (12′) bilden zusammen das confocale System (9′), während das letzte unter die von (9′) abweichende Gleichungsform:

(14′) $$(\beta' - \nu')x^2 + (\alpha' - \nu')y^2 = 0, \quad \beta' \leqq \nu' \leqq \alpha'$$

zusammengefasst werden kann. Bei dem Grenzübergang von (12) zu (12′) erhalten (vgl. Fig. 4 und 4′) die confocalen Kegelschnittsysteme der zweiten und dritten Hauptebene gleiche Brennweiten ($OC_0 = OA_0$), während das der ersten Hauptebene bei verschwindender Brennweite ($OB_0 = 0$) ein specielles (vgl. Anm. I, 4) wird. Die Focalkegelschnitte c

und b erhalten die Grenzform der Fig. 1'. Der Focalkreis c scheidet die Grenzformen $\lambda = \gamma$ und $\mu = \gamma$ unter (12'), während die Focalaxe b nicht nur die Grenzform $\mu = \alpha$ darstellt, sondern auch die Axe aller Ebenenpaare ν' ist. Da die Rotationsflächen λ, μ jede Meridianebene in einem System confocaler Kegelschnitte treffen, folgt nach der Theorie der letzteren (vgl. Anm. I, 3) sofort:

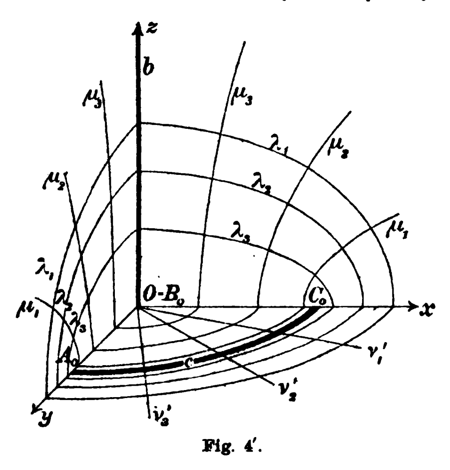


Fig. 4'.

II'. *Durch jeden Punkt x, y, z des Raumes gehen drei im Sinne der Tabelle* (12') *ungleichnamige Flächen, deren Parameter λ, μ und ν' bezüglich die Wurzeln der in τ quadratischen Gleichung* (9') *und der in ν' linearen Gleichung* (14') *sind.*

Eine Ausnahme bilden die Punkte der Focalaxe b, für welche ν' unbestimmt wird.

Für das zweite specielle confocale System setzen wir in (12):

$$(13'') \qquad \beta = \gamma + \varepsilon\beta', \quad \gamma = \gamma + \varepsilon\gamma' \, (\beta' > \gamma'), \quad \mu = \gamma + \varepsilon\mu'$$

und erhalten zuerst:

$$-\infty < \lambda < \gamma + \varepsilon\gamma' : \; \frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\gamma + \varepsilon\beta' - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma + \varepsilon\gamma' - \lambda} = 1,$$

$$\lambda = \gamma + \varepsilon\gamma' : \; \frac{\varepsilon x^2}{\alpha - \gamma - \varepsilon\gamma'} + \frac{y^2}{\beta' - \gamma'} \leqq \varepsilon \left[\frac{x^2}{\alpha - \gamma - \varepsilon\gamma'} \leqq 1\right], \; z^2 = 0$$

$$\mu' = \gamma' : \; \frac{\varepsilon x^2}{\alpha - \gamma - \varepsilon\gamma'} + \frac{y^2}{\beta' - \gamma'} \geqq \varepsilon, \quad z^2 = 0,$$

$$\gamma' < \mu' < \beta' : \; \frac{\varepsilon x^2}{\alpha - \gamma - \varepsilon\mu'} + \frac{y^2}{\beta' - \mu'} + \frac{z^2}{\gamma' - \mu'} = \varepsilon,$$

$$\mu' = \beta' : \; \frac{\varepsilon x^2}{\alpha - \gamma - \varepsilon\beta'} + \frac{z^2}{\gamma' - \beta'} \leqq \varepsilon, \quad y^2 = 0,$$

$$\nu = \gamma + \varepsilon\beta' : \; \frac{\varepsilon x^2}{\alpha - \gamma - \varepsilon\beta'} + \frac{z^2}{\gamma' - \beta'} \geqq \varepsilon \left[\frac{x^2}{\alpha - \gamma - \varepsilon\beta'} \geqq 1\right], \; y^2 = 0,$$

$$\gamma + \varepsilon\beta' < \nu < \alpha : \; \frac{x^2}{\alpha - \nu} + \frac{y^2}{\gamma + \varepsilon\beta' - \nu} + \frac{z^2}{\gamma + \varepsilon\gamma' - \nu} = 1,$$

wo die beiden eingeklammerten Ungleichungen eine Folge der je unmittelbar vorhergehenden sind. Daraus ergiebt sich mit unbegrenzt abnehmendem ε folgende Grenzform der Tabelle (12):

(12″) *Verlängerte Rotationsellipsoide.*

$$\lambda = -\infty : p^2 = 0,$$

$$-\infty < \lambda < \gamma : \frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2 + z^2}{\gamma - \lambda} = 1,$$

$$\lambda = \gamma : \frac{x^2}{\alpha - \gamma} \leqq 1, \quad y^2 = 0, \quad z^2 = 0.$$

Meridianebenenpaare.

$$\mu' = \gamma' : z^2 = 0,$$

$$\gamma' < \mu' < \beta' : \frac{y^2}{\beta' - \mu'} + \frac{z^2}{\gamma' - \mu'} = 0,$$

$$\mu' = \beta' : y^2 = 0.$$

Zweischalige Rotationshyperboloide.

$$\nu = \gamma : \frac{x^2}{\alpha - \gamma} \geqq 1, \quad y^2 = 0, \quad z^2 = 0,$$

$$\gamma < \nu < \alpha : \frac{x^2}{\alpha - \nu} + \frac{y^2 + z^2}{\gamma - \nu} = 1,$$

$$\nu = \alpha : x^2 = 0.$$

Die erste und dritte Flächenschaar (12″) bilden zusammen das zweite specielle confocale System (9″), während die zweite unter die abweichende Gleichungsform

(14″) $$(\gamma' - \mu')y^2 + (\beta' - \mu')z^2 = 0$$

zusammengefasst werden kann. Bei dem Grenzübergang von (12) auf (12″) erhalten (vgl. Fig. 4 und 4″) die confocalen Kegelschnittsysteme der ersten und zweiten Hauptebene die gemeinsamen Brennpunkte $B_0 = C_0$ und $B_0' = C_0'$, während das der dritten Hauptebene bei verschwindender Excentricität ($A_0 = O$) ein specielles wird (vgl. Anm. I, 4). Die Focalkegelschnitte c und b erhalten die Grenzform der Fig. 1″. Das innere Focalaxenstück c stellt die Grenzform $\lambda = \gamma$ der Ellipsoide, die äusseren Focalaxenstücke b die Grenzform $\nu = \gamma$ der zweischaligen Hyperboloide dar; beide Theile c und b zusammen bilden die Axe aller Ebenenpaare μ'. Wie vorhin folgt auch hier:

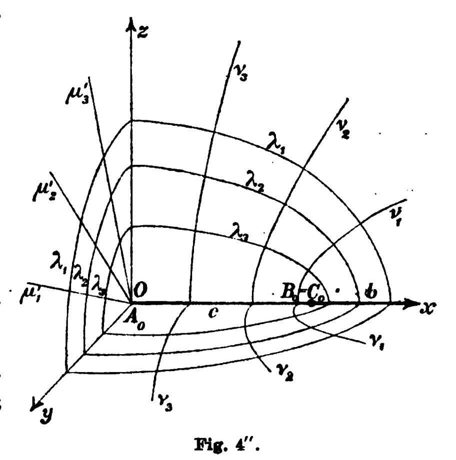


Fig. 4″.

II″. *Durch jeden Punkt x, y, z des Raumes gehen drei im Sinne*

der Tabelle (12″) *ungleichnamige Flächen, deren Parameter* λ, ν *und* μ' *bezüglich die Wurzeln der in* τ *quadratischen Gleichung* (9″) *und der in* μ' *linearen Gleichung* (14″) *sind.*

Eine Ausnahme bilden die Punkte der x-Axe, für welche μ' unbestimmt wird.

Für das dritte specielle confocale System setzen wir in (12):

$$(13''')\begin{cases}\alpha=\alpha+\varepsilon\alpha', \quad \beta=\alpha+\varepsilon\beta', \quad \gamma=\alpha+\varepsilon\gamma'\,(\alpha'>\beta'>\gamma')\\ \qquad\qquad \mu=\alpha+\varepsilon\mu', \quad \nu=\alpha+\varepsilon\nu'\end{cases}$$

und erhalten damit zuerst:

$$-\infty<\lambda<\alpha+\varepsilon\gamma':\ \frac{x^2}{\alpha+\varepsilon\alpha'-\lambda}+\frac{y^2}{\alpha+\varepsilon\beta'-\lambda}+\frac{z^2}{\alpha+\varepsilon\gamma'-\lambda}=1,$$

$$\lambda=\alpha+\varepsilon\gamma':\ \frac{x^2}{\alpha'-\gamma'}+\frac{y^2}{\beta'-\gamma'}\leqq\varepsilon,\quad z^2=0,$$

$$\mu'=\gamma':\ \frac{x^2}{\alpha'-\gamma'}+\frac{y^2}{\beta'-\gamma'}\geqq\varepsilon,\quad z^2=0,$$

$$\gamma'<\mu'<\beta':\ \frac{x^2}{\alpha'-\mu'}+\frac{y^2}{\beta'-\mu'}+\frac{z^2}{\gamma'-\mu'}=\varepsilon,$$

$$\mu'=\beta':\ \frac{x^2}{\alpha'-\beta'}+\frac{z^2}{\gamma'-\beta'}\leqq\varepsilon,\quad y^2=0,$$

$$\nu'=\beta':\ \frac{x^2}{\alpha'-\beta'}+\frac{z^2}{\gamma'-\beta'}\geqq\varepsilon,\quad y^2=0,$$

$$\beta'<\nu'<\alpha':\ \frac{x^2}{\alpha'-\nu'}+\frac{y^2}{\beta'-\nu'}+\frac{z^2}{\gamma'-\nu'}=\varepsilon$$

und daraus für unbegrenzt abnehmendes ε die folgende Grenzform der Tabelle (12):

(12‴)

Kugeln:

$$\lambda=-\infty:p^2=0,$$

$$-\infty<\lambda<\alpha:\ \frac{x^2+y^2+z^2}{\alpha-\lambda}=1,$$

$$\lambda=\alpha:\ x^2=0,\quad y^2=0,\quad z^2=0.$$

Kegel um die z-*Axe.*

$$\mu'=\gamma':\ z^2=0,$$

$$\gamma'<\mu'<\beta':\ \frac{x^2}{\alpha'-\mu'}+\frac{y^2}{\beta'-\mu'}+\frac{z^2}{\gamma'-\mu'}=0,$$

$$\mu'=\beta':\ \frac{x^2}{\alpha'-\beta'}+\frac{z^2}{\gamma'-\beta'}\leqq0,\quad y^2=0.$$

Kegel um die x-Axe:

$$\nu' = \beta' : \quad \frac{x^2}{\alpha' - \beta'} + \frac{z^2}{\gamma' - \beta'} \gtreqless 0, \quad y^2 = 0,$$

$$\beta' < \nu' < \alpha' : \quad \frac{x^2}{\alpha' - \nu'} + \frac{y^2}{\beta' - \nu'} + \frac{z^2}{\gamma' - \nu'} = 0,$$

$$\nu' = \alpha' : \quad x^2 = 0.$$

Die erste Flächenschaar (12‴) bildet das dritte specielle confocale System (9‴), während die beiden anderen unter der abweichenden Gleichungsform:

$$(14''') \qquad (\alpha' - \tau')(\beta' - \tau')(\gamma' - \tau')\left\{\frac{x^2}{\alpha' - \tau'} + \frac{y^2}{\beta' - \tau'} + \frac{z^2}{\gamma' - \tau'}\right\} = 0,$$

wo $\tau' = \mu', \nu'$ ist, zusammengefasst werden können.

Bei dem Grenzübergang von (12) auf (12‴) werden (vgl. Fig. 4 und 4‴) die Schnittcurven in allen drei Hauptebenen specielle confocale Systeme (vgl. Anm. I, 4). Die Linienpaare der letzteren rühren in der ersten Hauptebene von den Kegeln ν', in der dritten von den Kegeln μ', in der zweiten theils von diesen, theils von jenen her, so zwar, dass die ungleichnamigen Linienpaare durch das Linienpaar b (vgl. Fig. 4‴):

$$(8''') \qquad \frac{x^2}{\alpha' - \beta'} + \frac{z^2}{\gamma' - \beta'} = 0, \quad y = 0$$

Fig. 4‴.

(vgl. § 2, 8‴), die Grenzform der Focalhyperbel b (vgl. Fig. 1‴) getrennt werden. Dieses Linienpaar ist nicht sowohl für die Kugeln (vgl. § 1) als für die Kegel der Tabelle (12‴) von Bedeutung. Es heisst das gemeinsame *Focalaxenpaar* aller dieser Kegel, welche ihrerseits ein *System confocaler Kegel* mit der Gleichung (14‴) bilden.

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine ganze Function $G(\tau')$ zweiten Grades in τ', für welche unter der Voraussetzung $x \cdot y \cdot z \neq 0$:

$$G(\gamma') = (\alpha' - \gamma')(\beta' - \gamma')z^2 > 0, \quad G(\beta') = (\alpha' - \beta')(\gamma' - \beta')y^2 < 0,$$
$$G(\alpha') = (\beta' - \alpha')(\gamma' - \alpha')x^2 > 0.$$

Durch einen gegebenen Punkt x, y, z ausserhalb der Coordinatenebenen geht daher stets ein Kegel μ' und ein Kegel ν'. Dass dasselbe auch für die Punkte der Coordinatenebenen, mit Ausschluss des Punktes O,

gilt, ergiebt sich auf dieselbe Weise wie in § 4 bei Satz II. Es folgt daher auch jetzt:

II‴. *Durch jeden Punkt x, y, z des Raumes gehen drei im Sinne der Tabelle* (12‴) *ungleichnamige Flächen, deren Parameter λ, μ', ν' bezüglich die Wurzeln der in τ linearen Gleichung* (9‴) *und der in τ' quadratischen Gleichung* (14‴) *sind.*

Eine Ausnahme bildet der Punkt O, die gemeinsame Spitze aller Kegel (14‴).

Indem wir durch einen mit (13′) und (13″) analogen Grenzübergang $\alpha' = \beta'$ oder $\beta' = \gamma'$ werden lassen, können wir wieder die eine der beiden Kegelschaaren (12‴) in Rotationskegel, die andere in entsprechende Meridianebenenpaare überführen.

Zweites Capitel.

Die elliptischen Coordinaten.

§ 6. Begriff und Arten der elliptischen Coordinaten.

Die Parameter λ, μ, ν der drei ungleichnamigen Flächen (12), welche nach § 4, II durch einen Punkt P des Raumes hindurchgehen, führen, als krummlinige Coordinaten (vgl. Anm. V, 1) des Punktes benutzt, den Namen der *elliptischen Coordinaten.* Für sie folgt zugleich aus § 4, II:

I. *Jeder Punkt des Raumes hat drei bestimmte elliptische Coordinaten λ, μ, ν, welche bei gegebenen gewöhnlichen Coordinaten x, y, z als Wurzeln der Gleichung* (9) *hervorgehen und den Ungleichungen* (11) *genügen.*

Zwischen elliptischen und gewöhnlichen Coordinaten eines und desselben Punktes besteht daher identisch in τ die folgende Gleichung:

$$(15)\qquad (\alpha-\tau)(\beta-\tau)(\gamma-\tau)\left\{\frac{x^2}{\alpha-\tau}+\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}-1\right\} = (\tau-\lambda)(\tau-\mu)(\tau-\nu).$$

Aus ihr folgen mit $\tau = \lambda,\ \mu,\ \nu$ die Relationen:

$$(16)\qquad \begin{cases} (\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)\left\{\frac{x^2}{\alpha-\lambda}+\frac{y^2}{\beta-\lambda}+\frac{z^2}{\gamma-\lambda}-1\right\}=0, \\ (\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)\left\{\frac{x^2}{\alpha-\mu}+\frac{y^2}{\beta-\mu}+\frac{z^2}{\gamma-\mu}-1\right\}=0, \\ (\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)\left\{\frac{x^2}{\alpha-\nu}+\frac{y^2}{\beta-\nu}+\frac{z^2}{\gamma-\nu}-1\right\}=0, \end{cases}$$

welche je nur eine elliptische Coordinate, und mit $\tau = \alpha,\ \beta,\ \gamma$ die Relationen:

$$(17)\quad x^2 = \frac{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},\quad y^2 = \frac{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)},$$
$$z^2 = \frac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},$$

welche je nur eine gewöhnliche Coordinate enthalten.

Werden hier die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν eines bestimmten Punktes als gegeben betrachtet, so stellen die Gleichungen (16) in laufenden Coordinaten x, y, z die drei *Coordinatenflächen* λ, μ, ν dar, welche durch den Punkt gehen, und drücken *die Gleichungen* (17) die gewöhnlichen Coordinaten des Punktes durch seine elliptischen aus. Dementsprechend sind die Gleichungen (17) *die Auflösungen der Gleichungen* (16) nach x^2, y^2, z^2 und durch diese bestimmt, so lange nicht $\lambda = \mu = \gamma$ oder $\mu = \nu = \beta$ wird. In diesen Ausnahmefällen müssen die beiden zusammenfallenden Gleichungen (16) durch die beiden Gleichungen (erste oder zweite Zeile (8) in § 2) desjenigen Focalkegelschnittes ersetzt werden, in welchem sich die betreffenden beiden Coordinatenflächen im Momente vor ihrem Zusammenfall schneiden (vgl. § 3 die zu 9,z gemachten Bemerkungen über die Schnittcurvenenveloppe).

Da die rechten Seiten der Gleichungen (17) für willkürliche den Bedingungen (11) entsprechende Werthe λ, μ, ν niemals negativ werden, so schneiden sich irgend drei ungleichnamige Flächen (12) stets in reellen, und zwar im Allgemeinen in 8 reellen Punkten.

II. *Irgend drei im Einklange mit den Ungleichungen* (11) *gegebene elliptische Coordinaten* λ, μ, ν *bestimmen 8 Punkte des Raumes, deren gewöhnliche Coordinaten die Werthe haben:*

$$(18)\quad x = \sqrt{\frac{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}},\quad y = \sqrt{\frac{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}},$$
$$z = \sqrt{\frac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}}.$$

Diese 8 Punkte liegen in den 8 Octanten des Coordinatensystems $Oxyz$ symmetrisch vertheilt und fallen in einer Coordinatenebene zu je 2, in einer Coordinatenaxe zu je 4, im Coordinatenanfangspunkt alle 8 zusammen.

In welchen Punkten des Raumes die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν alle drei verschieden sind oder nicht, in welchen sie die speciellen Werthe γ, β, α haben oder nicht, geht aus den zum Satz II in § 4 angestellten Betrachtungen unmittelbar hervor. *Für einen Punkt der Focalellipse c ist stets $\lambda = \mu = \gamma$, für einen Punkt der Focalhyperbel $\mu = \nu = \beta$.*

Für die gewöhnlichen Coordinaten der Schnittpunkte der Focalhyperbel b mit dem Ellipsoide λ ist daher nach (17)

$$x^2 = \frac{(\alpha - \lambda)(\alpha - \beta)}{\alpha - \gamma}, \quad y^2 = 0, \quad z^2 = \frac{(\gamma - \lambda)(\beta - \gamma)}{\alpha - \gamma}$$

und der Schnittpunkte der Focalellipse c mit dem zweischaligen Hyperboloide ν:

$$x^2 = \frac{(\alpha - \gamma)(\alpha - \nu)}{\alpha - \beta}, \quad y^2 = \frac{(\beta - \gamma)(\nu - \beta)}{\alpha - \beta}, \quad z^2 = 0.$$

Diese Formeln charakterisiren aber die Kreispunkte der Flächen λ und ν*):

III. *Die Focalhyperbel schneidet die Ellipsoide, die Focalellipse die zweischaligen Hyperboloide des confocalen Systems in ihren Kreispunkten.*

Dass dieser Satz bei Zugrundelegung der Definitionen des § 1 auch für die drei speciellen confocalen Systeme, und zwar für deren Rotationsellipsoide, zweischalige Hyperboloide und Kugeln gilt, ist unmittelbar ersichtlich.

Für die Hauptebenen gehen die elliptischen Coordinaten des Raumes in die elliptischen Coordinaten der Ebene über (vgl. Anm. I, 5), jedoch in den Ebenen der Focalkegelschnitte mit einer Modification in der Bezeichnung. In der xy-Ebene nämlich hat ein Punkt innerhalb der Focalellipse c die räumlichen elliptischen Coordinaten γ, μ, ν, ein Punkt ausserhalb λ, γ, ν (vgl. § 4); bei jenem ist μ, bei diesem λ zugleich der Parameter der Ellipse, bei beiden aber ν zugleich der Parameter der Hyperbel des Systems (9,z) in § 3, auf welcher der Punkt liegt (vgl. Fig. 4). Bezeichnen wir daher die durch das System (9,z), beziehungsweise dessen Brennpunkte B_0, B_0' bestimmten elliptischen Coordinaten der xy-Ebene zur Unterscheidung mit $\lambda^{\cdot}, \mu^{\cdot}$ (im Sinne von Anm. I, 3), so folgt:

IV. *Hat ein Punkt der xy-Ebene die räumlichen elliptischen Coordinaten γ, μ, ν oder λ, γ, ν, so sind seine ebenen elliptischen Coordinaten $\lambda^{\cdot}, \mu^{\cdot}$ mit Bezug auf die Brennpunkte B_0, B_0':*

$$\lambda^{\cdot} = \mu \text{ oder } \lambda, \quad \mu^{\cdot} = \nu. \quad (-\infty \leqq \lambda^{\cdot} \leqq \beta, \ \beta \leqq \mu^{\cdot} \leqq \alpha).$$

Entsprechend ergiebt sich:

---

*) Die Kreispunkte des Ellipsoides: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ sind unter der Voraussetzung $a^2 > b^2 > c^2$:

$$x^2 = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}, \quad y^2 = 0, \quad z^2 = \frac{c^2(b^2 - c^2)}{a^2 - c^2},$$

(im Text $a^2 = \alpha - \lambda$, $b^2 = \beta - \lambda$, $c^2 = \gamma - \lambda$); die des zweischaligen Hyperboloides $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ unter der Voraussetzung $b^2 < c^2$:

$$x^2 = \frac{a^2(a^2 + c^2)}{a^2 + b^2}, \quad y^2 = \frac{b^2(c^2 - b^2)}{a^2 + b^2}, \quad z^2 = 0$$

(im Text $a^2 = \alpha - \nu$, $b^2 = \nu - \beta$, $c^2 = \nu - \gamma$), vgl. Lindemann, a. § 1 a. O., S. 189.

IV. *Hat ein Punkt der xz-Ebene die räumlichen elliptischen Coordinaten λ, β, ν oder λ, μ, β, so sind seine ebenen elliptischen Coordinaten $\lambda^{\cdot\cdot}, \mu^{\cdot\cdot}$ mit Bezug auf die Brennpunkte C_0, C_0':*

$$\lambda^{\cdot\cdot} = \lambda, \quad \mu^{\cdot\cdot} = \nu \text{ oder } \mu \quad (-\infty \leqq \lambda^{\cdot\cdot} \leqq \gamma, \quad \gamma \leqq \mu^{\cdot\cdot} \leqq \alpha).$$

In der yz-Ebene sind die beiden ersten räumlichen elliptischen Coordinaten eines Punktes λ, μ, α zugleich seine ebenen in Bezug auf die Brennpunkte A_0, A_0' (vgl. Fig. 4).

In der Identität (15) tritt für Punkte der xy-Ebene mit $\lambda = \gamma$ oder $\mu = \gamma$ beiderseits der Factor $\gamma - \tau$ auf (vgl. § 3, zu 9,z), welcher, da er nicht identisch in τ verschwindet, wegfallen darf. Für alle Punkte der Ebene bleibt daher zwischen x, y und $\lambda^{\cdot}, \mu^{\cdot}$ identisch in τ die Gleichung:

$$(\alpha - \tau)(\beta - \tau)\left\{\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} - 1\right\} = -(\tau - \lambda^{\cdot})(\tau - \mu^{\cdot})$$

(vgl. Anm. I, 5, 15°). In ihr kann nun auch $\tau = \gamma$ gesetzt werden, sodass zwischen x, y und $\lambda^{\cdot}, \mu^{\cdot}$ die Relation besteht:

$$(15,\gamma) \qquad \frac{x^2}{\alpha - \gamma} + \frac{y^2}{\beta - \gamma} - 1 = -\frac{(\gamma - \lambda^{\cdot})(\gamma - \mu^{\cdot})}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}.$$

Wie die Parameter der Flächenschaaren (12), so können auch die der Flächenschaaren (12′), (12″) und (12‴) in § 5 als krummlinige Coordinaten dienen.

Für das *erste specielle confocale System* (12′) treten dann an Stelle der Gleichung (15) die beiden Gleichungen:

$$(15') \qquad (\alpha - \tau)(\gamma - \tau)\left\{\frac{x^2 + y^2}{\alpha - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} - 1\right\} = -(\tau - \lambda)(\tau - \mu),$$

$$(14') \qquad (\alpha' - \nu')(\beta' - \nu')\left\{\frac{x^2}{\alpha' - \nu'} + \frac{y^2}{\beta' - \nu'}\right\} = 0,$$

aus denen mit $\tau = \alpha, \gamma$ und Trennung von x^2 und y^2 hervorgeht:

$$(17') \qquad x^2 = \frac{(\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)}{\alpha - \gamma} \cdot \frac{\alpha' - \nu'}{\alpha' - \beta'}, \quad y^2 = \frac{(\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)}{\alpha - \gamma} \cdot \frac{\beta' - \nu'}{\beta' - \alpha'},$$

$$z^2 = \frac{(\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)}{\gamma - \alpha}.$$

Dieselben Formeln folgen auch direct aus (17) mit der Substitution (13′) und dem Grenzübergang für $\varepsilon = 0$*). Auf die Theorie dieser Coordinaten brauchen wir hier nicht einzugehen; denn während die Coordinate ν' das Paar von Meridianebenen (14′) bestimmt, in deren einer der Punkt λ, μ, ν' liegt, *sind λ, μ nichts anderes als die ebenen elliptischen Coordinaten des Punktes in seiner Meridianebene*, bezogen auf

*) Vgl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, hrsg. von Clebsch, Berlin 1866, S. 218.

das confocale Kegelschnittsystem (9_0) in § 3, durch dessen Rotation um die z-Axe das confocale System (9') entsteht.

Analoges gilt von den auf das *zweite specielle confocale System* (12'') gegründeten elliptischen Coordinaten λ, μ', ν. Wir erwähnen daher auch für sie nur die Gleichungen:

$$(15'')\quad (\alpha-\tau)(\gamma-\tau)\left\{\frac{x^2}{\alpha-\tau}+\frac{y^2+z^2}{\gamma-\tau}-1\right\}=-(\tau-\lambda)(\tau-\nu),$$

$$(14'')\quad (\beta'-\mu')(\gamma'-\mu')\left\{\frac{y^2}{\beta'-\mu'}+\frac{z^2}{\gamma'-\mu'}\right\}\quad=0,$$

$$(17'')\quad x^2=\frac{(\alpha-\lambda)(\alpha-\nu)}{\alpha-\gamma},\quad y^2=\frac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\nu)}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\beta'-\mu'}{\beta'-\gamma'},$$
$$z^2=\frac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\nu)}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\gamma'-\mu'}{\gamma'-\beta'},$$

von denen die letzteren aus (17) durch die Substitution (13'') und den Grenzübergang für $\varepsilon=0$ entstehen.

Dagegen führt das *dritte specielle confocale System* (12''') nicht auf die ebenen elliptischen Coordinaten, sondern auf die sogenannten *elliptischen Kugelcoordinaten* λ, μ', ν'. Zwischen diesen und den gewöhnlichen Coordinaten bestehen identisch in τ und τ' die beiden Gleichungen:

$$(15''')\quad\begin{cases}(\alpha-\tau)\left\{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{\alpha-\tau}-1\right\}=\tau-\lambda,\\(\alpha'-\tau')(\beta'-\tau')(\gamma'-\tau')\left\{\dfrac{x^2}{\alpha'-\tau'}+\dfrac{y^2}{\beta'-\tau'}+\dfrac{z^2}{\gamma'-\tau'}\right\}\\\qquad=(x^2+y^2+z^2)(\tau'-\mu')(\tau'-\nu'),\end{cases}$$

wobei

$$(11''')\qquad -\infty\leqq\lambda\leqq\alpha,\quad \gamma'\leqq\mu'\leqq\beta',\quad \beta'\leqq\nu'\leqq\alpha'.$$

Aus ihnen folgen einerseits mit $\tau=\lambda$, $\tau'=\mu'$, ν' die Relationen:

$$(16''')\quad\begin{cases}x^2+y^2+z^2-(\alpha-\lambda)=0,\\(\alpha'-\mu')(\beta'-\mu')(\gamma'-\mu')\left\{\dfrac{x^2}{\alpha'-\mu'}+\dfrac{y^2}{\beta'-\mu'}+\dfrac{z^2}{\gamma'-\mu'}\right\}=0,\\(\alpha'-\nu')(\beta'-\nu')(\gamma'-\nu')\left\{\dfrac{x^2}{\alpha'-\nu'}+\dfrac{y^2}{\beta'-\nu'}+\dfrac{z^2}{\gamma'-\nu'}\right\}=0\end{cases}$$

und andererseits mit $\tau=\alpha$, $\tau'=\alpha'$, β', γ' und Elimination von $x^2+y^2+z^2$ die Gleichungen:

$$(17''')\quad x^2=(\alpha-\lambda)\frac{(\alpha'-\mu')(\alpha'-\nu')}{(\alpha'-\beta')(\alpha'-\gamma')},\quad y^2=(\alpha-\lambda)\frac{(\beta'-\mu')(\beta'-\nu')}{(\beta'-\gamma')(\beta'-\alpha')},$$
$$z^2=(\alpha-\lambda)\frac{(\gamma'-\mu')(\gamma'-\nu')}{(\gamma'-\alpha')(\gamma'-\beta')},$$

die letzteren auch durch den Grenzübergang (13''') aus (17) hervorgehend.

Die Gleichungen (17‴) sind die Auflösungen der Gleichungen (16‴) nach x^2, y^2, z^2 und durch diese bestimmt, solange nicht $\mu' = \nu' = \beta'$ wird. In diesem Ausnahmefalle sind die beiden letzten Gleichungen (16‴) durch die beiden Gleichungen (8‴) (vgl. § 5, zu 12‴) des Focalaxenpaares b zu ersetzen, in welchem die beiden Kegelgrenzformen $\mu' = \beta'$ und $\nu' = \beta'$ sich schneiden.

§ 7. Identische Relationen zwischen gewöhnlichen und elliptischen Coordinaten.

Die Gleichungen (15) und (16) gelten für zusammengehörige gewöhnliche und elliptische Coordinaten ausnahmlos. Beispielsweise ist die erste Gleichung (16), in der Form:

$$(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)x^2 + (\gamma - \lambda)(\alpha - \lambda)y^2 +$$
$$+ (\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)z^2 - (\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda) = 0$$

verstanden, für die zusammengehörigen Coordinaten $x, y, 0$ und γ, μ, ν eines Punktes der Ebene $z = 0$ innerhalb der Focalellipse unmittelbar erfüllt. Dagegen würde sie in der Form:

$$\frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\beta - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} - 1 = 0$$

auf den Fall $z = 0$, $\lambda = \gamma$ nicht in gleicher Weise anwendbar sein, wenn schon sie auch jetzt nach Substitution der Werthe (17) eine Identität in λ, μ, ν ist. Der Kürze wegen benutzen wir aber im Folgenden die Relationen (15) und (16) in den Formen:

$$\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} - 1 = \frac{(\tau - \lambda)(\tau - \mu)(\tau - \nu)}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}, \tag{19}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha - \lambda} + \dfrac{y^2}{\beta - \lambda} + \dfrac{z^2}{\gamma - \lambda} - 1 = 0, \\ \dfrac{x^2}{\alpha - \mu} + \dfrac{y^2}{\beta - \mu} + \dfrac{z^2}{\gamma - \mu} - 1 = 0, \\ \dfrac{x^2}{\alpha - \nu} + \dfrac{y^2}{\beta - \nu} + \dfrac{z^2}{\gamma - \nu} - 1 = 0, \end{cases} \tag{20}$$

indem wir auf ihre Anwendung für solche Fälle verzichten, in denen die vorkommenden Nenner verschwinden.

Wird jetzt aus der Gleichung (19) und je einer der Gleichungen (20) durch Subtraction das constante Glied : -1 eliminirt, so ergeben sich nach Weglassung der nicht identisch verschwindenden Factoren $\tau - \lambda$, $\tau - \mu$, $\tau - \nu$ die Relationen:

$$(21)\begin{cases}\dfrac{x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\lambda)}+\dfrac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\tau)(\gamma-\lambda)}=\dfrac{(\tau-\mu)(\tau-\nu)}{(\alpha-\tau)(\beta-\tau)(\gamma-\tau)},\\ \dfrac{x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\mu)}+\dfrac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\mu)}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\tau)(\gamma-\mu)}=\dfrac{(\tau-\nu)(\tau-\lambda)}{(\alpha-\tau)(\beta-\tau)(\gamma-\tau)},\\ \dfrac{x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\nu)}+\dfrac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\nu)}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\tau)(\gamma-\nu)}=\dfrac{(\tau-\lambda)(\tau-\mu)}{(\alpha-\tau)(\beta-\tau)(\gamma-\tau)}.\end{cases}$$

Ebenso gehen durch die Elimination der Glieder mit x^2, y^2 oder z^2 aus der Gleichung (19) und je einer Gleichung (20) drei ähnliche Formelgruppen hervor, von denen beispielsweise die letzte lautet:

$$(21,z)\begin{cases}\dfrac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\lambda)}+\dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)}-1=-\dfrac{(\tau-\mu)(\tau-\nu)}{(\alpha-\tau)(\beta-\tau)},\\ \dfrac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\mu)}+\dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\mu)}-1=-\dfrac{(\tau-\nu)(\tau-\lambda)}{(\alpha-\tau)(\beta-\tau)},\\ \dfrac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\nu)}+\dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\nu)}-1=-\dfrac{(\tau-\lambda)(\tau-\mu)}{(\alpha-\tau)(\beta-\tau)}\end{cases}$$

und die beiden anderen $(21,x)$ und $(21,y)$ aus dieser durch cyclische Vertauschung von x, y, z und α, β, γ entstehen.

Aus diesen vier coordinirten Formelgruppen gehen nun weitere durch Substitution specieller Werthe für τ hervor. So folgt zuerst aus den drei Gleichungen (21), wenn beziehungsweise $\tau=\lambda, \mu, \nu$ gesetzt wird:

$$(22)\begin{cases}\dfrac{x^2}{(\alpha-\lambda)^2}+\dfrac{y^2}{(\beta-\lambda)^2}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\lambda)^2}=\dfrac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)},\\ \dfrac{x^2}{(\alpha-\mu)^2}+\dfrac{y^2}{(\beta-\mu)^2}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\mu)^2}=\dfrac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)},\\ \dfrac{x^2}{(\alpha-\nu)^2}+\dfrac{y^2}{(\beta-\nu)^2}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\nu)^2}=\dfrac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}\end{cases}$$

und, wenn beziehungsweise $\tau=\mu$ oder ν, ν oder λ, λ oder μ gesetzt wird:

$$(23)\begin{cases}\dfrac{x^2}{(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)}+\dfrac{y^2}{(\beta-\mu)(\beta-\nu)}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}=0,\\ \dfrac{x^2}{(\alpha-\nu)(\alpha-\lambda)}+\dfrac{y^2}{(\beta-\nu)(\beta-\lambda)}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\nu)(\gamma-\lambda)}=0,\\ \dfrac{x^2}{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)}+\dfrac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)}=0.\end{cases}$$

In gleicher Weise entstehen aus den drei Gleichungen $(21,z)$ die Relationen:

$$(22,z)\begin{cases}\dfrac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\lambda)^2}+\dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\lambda)^2}-1=-\dfrac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)},\\ \dfrac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\mu)^2}+\dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\mu)^2}-1=-\dfrac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)},\\ \dfrac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\nu)^2}+\dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\nu)^2}-1=-\dfrac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)}\end{cases}$$

und:

$$(23, z)\quad \begin{cases} \dfrac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)} + \dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\mu)(\beta-\nu)} - 1 = 0, \\ \dfrac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\nu)(\alpha-\lambda)} + \dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\nu)(\beta-\lambda)} - 1 = 0, \\ \dfrac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)} + \dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)} - 1 = 0. \end{cases}$$

Aus den beiden letzten Formelgruppen gehen weitere durch die ererwähnten cyclischen Vertauschungen hervor.

Für die Ebene $z = 0$ benutzen wir aus dem zu Anfang dieses § 7 angegebenen Grunde etwa von den Gleichungen (23) nur die erste oder zweite, jenachdem $\lambda = \gamma$ oder $\mu = \gamma$ ist, und erhalten für beide Fälle mit Anwendung der in § 6 zu IV eingeführten Bezeichnung die Relation:

$$\frac{x^2}{(\alpha-\lambda^{\cdot})(\alpha-\mu^{\cdot})} + \frac{y^2}{(\beta-\lambda^{\cdot})(\beta-\mu^{\cdot})} = 0$$

(vgl. Anm. I, 6, 23⁰), giltig für zusammengehörige Coordinaten x, y und $\lambda^{\cdot}$, $\mu^{\cdot}$ aller Punkte der xy-Ebene. Mit $\lambda^{\cdot} = \gamma$ folgt hieraus im Besonderen, dass für alle Punkte der Focalellipse c:

$$(23, \gamma)\qquad \frac{x^2}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\nu)} + \frac{y^2}{(\beta-\gamma)(\beta-\nu)} = 0.$$

§. 8. Die elliptischen Coordinaten eines Linienelementes.

Zwischen gewöhnlichen Coordinaten x, y, z, dx, dy, dz und elliptischen Coordinaten λ, μ, ν, $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ eines Linienelementes (vgl. Anm. V, 3) besteht, aus (15) hervorgehend, identisch in τ die folgende Gleichung:

$$(24)\qquad (\alpha-\tau)(\beta-\tau)(\gamma-\tau)\left\{\frac{2x\,dx}{\alpha-\tau} + \frac{2y\,dy}{\beta-\tau} + \frac{2z\,dz}{\gamma-\tau}\right\} =$$
$$-(\tau-\lambda)(\tau-\mu)(\tau-\nu)\left\{\frac{d\lambda}{\tau-\lambda} + \frac{d\mu}{\tau-\mu} + \frac{d\nu}{\tau-\nu}\right\}.$$

Aus ihr folgt mit $\tau = \lambda, \mu, \nu$:

$$(25)\begin{cases} -(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)d\lambda = 2(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)\left\{\dfrac{x\,dx}{\alpha-\lambda} + \dfrac{y\,dy}{\beta-\lambda} + \dfrac{z\,dz}{\gamma-\lambda}\right\}, \\ -(\mu-\nu)(\mu-\lambda)d\mu = 2(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)\left\{\dfrac{x\,dx}{\alpha-\mu} + \dfrac{y\,dy}{\beta-\mu} + \dfrac{z\,dz}{\gamma-\mu}\right\}, \\ -(\nu-\lambda)(\nu-\mu)d\nu = 2(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)\left\{\dfrac{x\,dx}{\alpha-\nu} + \dfrac{y\,dy}{\beta-\nu} + \dfrac{z\,dz}{\gamma-\nu}\right\}, \end{cases}$$

und mit $\tau = \alpha, \beta, \gamma$:

$$(26)\begin{cases} 2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)x\,dx = -(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\left\{\frac{d\lambda}{\alpha-\lambda}+\frac{d\mu}{\alpha-\mu}+\frac{d\nu}{\alpha-\nu}\right\}, \\ 2(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)y\,dy = -(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\left\{\frac{d\lambda}{\beta-\lambda}+\frac{d\mu}{\beta-\mu}+\frac{d\nu}{\beta-\nu}\right\}, \\ 2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)z\,dz = -(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\left\{\frac{d\lambda}{\gamma-\lambda}+\frac{d\mu}{\gamma-\mu}+\frac{d\nu}{\gamma-\nu}\right\}. \end{cases}$$

Die Formeln (25) drücken die drei letzten der sechs elliptischen Coordinaten des Linienelementes durch die drei letzten der sechs gewöhnlichen Coordinaten aus, wobei zwischen den drei ersten Coordinaten der einen und den drei ersten der anderen Art gleichzeitig die Relationen (16) und (17) obwalten. Nur wenn der Anfangspunkt λ, μ, ν des Linienelementes auf der Focalellipse $\lambda = \mu = \gamma$ liegt, werden $d\lambda$ und $d\mu$, wenn er auf der Focalhyperbel $\mu = \nu = \beta$ liegt, $d\mu$ und $d\nu$ unbestimmt. Die rechte Seite der ersten Gleichung (25) ist das Differential der linken Seite der ersten Gleichung (16), woraus hervorgeht:

I. *Die Coordinate $d\lambda$ eines Linienelementes verschwindet dann und nur dann, wenn das Element in der Coordinatenfläche λ seines Anfangspunktes λ, μ, ν liegt, also einer Tangente des Ellipsoides λ angehört.*

Hierbei gilt als Tangente in einem Punkte γ, μ, ν der Grenzfläche $\lambda = \gamma$ (Doppelebene $z^2 = 0$) jede durch diesen Punkt gehende Gerade, wie denn in (25) $d\lambda$ mit $z = 0$, $\lambda = \gamma$ unabhängig von dx, dy, dz verschwindet. Die beiden letzten Formeln (25) erhalten mit $z = 0$, $\lambda = \gamma$ bezüglich die Factoren $\gamma - \mu$ und $\gamma - \nu$ und reduciren sich, wenn nicht zugleich $\mu = \gamma$ ist, auf:

$$(\mu - \nu)d\mu = 2(\alpha - \mu)(\beta - \mu)\left\{\frac{x\,dx}{\alpha - \mu} + \frac{y\,dy}{\beta - \mu}\right\},$$

$$(\nu - \mu)d\nu = 2(\alpha - \nu)(\beta - \nu)\left\{\frac{x\,dx}{\alpha - \nu} + \frac{y\,dy}{\beta - \nu}\right\}.$$

Die hierdurch dargestellten Differentiale $d\mu$, $d\nu$ sind aber die elliptischen Coordinaten $d\lambda^{\cdot}$, $d\mu^{\cdot}$ (vgl. § 6, IV und Anm. I, 7, 25⁰) des in der Ebene $z = 0$ liegenden Elementes x, y, dx, dy. Indem wir also voraussetzen, dass das Element $\gamma, \mu, \nu, 0, d\mu, d\nu$ in dieser Ebene liegt, was aus $\lambda = \gamma$, $d\lambda = 0$ allein noch nicht folgt, so erhalten wir mit Hinzunahme des analogen Falles $\mu = \gamma$, $d\mu = 0$ den folgenden Satz:

II. *Sind die räumlichen elliptischen Coordinaten eines in der xy-Ebene liegenden Linienelementes $\gamma, \mu, \nu, 0, d\mu, d\nu$ oder $\lambda, \gamma, \mu, d\lambda, 0, d\nu$, so sind seine ebenen elliptischen Coordinaten mit Bezug auf die Brennpunkte B_0, B_0': $\lambda^{\cdot} = \mu$, $\mu^{\cdot} = \nu$, $d\lambda^{\cdot} = d\mu$, $d\mu^{\cdot} = d\nu$ oder $\lambda^{\cdot} = \lambda$, $\mu^{\cdot} = \nu$, $d\lambda^{\cdot} = d\lambda$, $d\mu^{\cdot} = d\nu$.*

Ausgenommen sind von diesem Satze die Linienelemente $\lambda = \mu = \gamma$,

da für diese $d\lambda$ und $d\mu$ unbestimmt werden, $d\lambda\cdot$ aber bestimmt ist. Entsprechende Betrachtungen gelten für die xz- und yz-Ebene.

Die Formeln (26) drücken die gewöhnlichen Coordinaten dx, dy, dz durch die elliptischen Coordinaten $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ des Linienelementes aus. Nur wenn der Anfangspunkt des letzteren in die Coordinatenebenen $z=0$, $y=0$ oder $x=0$ fällt, wird bezüglich dz, dy oder dx unbestimmt. Von diesem Ausnahmefalle abgesehen, ergeben sich aus (26) für die partiellen Differentialquotienten x_1, y_1, z_1 von x, y, z nach λ, x_2, y_2, z_2 nach μ und x_3, y_3, z_3 nach ν die Werthe (vgl. § 6, 17):

$$(27)\quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{x}{2(\alpha-\lambda)}, & y_1 = -\dfrac{y}{2(\beta-\lambda)}, \quad z_1 = -\dfrac{z}{2(\gamma-\lambda)}, \\ x_2 = -\dfrac{x}{2(\alpha-\mu)}, & y_2 = -\dfrac{y}{2(\beta-\mu)}, \quad z_2 = -\dfrac{z}{2(\gamma-\mu)}, \\ x_3 = -\dfrac{x}{2(\alpha-\nu)}, & y_3 = -\dfrac{y}{2(\beta-\nu)}, \quad z_3 = -\dfrac{z}{2(\gamma-\nu)}. \end{cases}$$

Hiermit nehmen die Gleichungen (23) die Form an:

$$x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = 0,$$
$$x_3x_1 + y_3y_1 + z_3z_1 = 0,$$
$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0,$$

woraus folgt (vgl. Anm. V, 5⁰):

III. *Die elliptischen Coordinaten sind orthogonale Coordinaten.*

Ferner ergeben sich aus den identischen Gleichungen (22) für die Ausdrücke:

$$l = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad m = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}, \quad n = \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}$$

die Darstellungen:

$$(28)\quad l = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}}, \qquad m = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}},$$
$$n = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}}.$$

§ 9. Die Axen eines Punktes in dem elliptischen Coordinatensystem.

Als *Axen* ξ, η, ζ *des Punktes* $P = \lambda, \mu, \nu$ *in dem elliptischen Coordinatensystem* bezeichnen wir die *positiven Tangenten der Coordinatenlinien* oder, was dasselbe ist, die *positiven Normalen der Coordinatenflächen* im Punkte P (vgl. Anm. V, 2). Sie haben gegen das Coordinatensystem $Oxyz$ die Richtungscosinus (vgl. ebenda, unter 4⁰):

(29)

	x	y	z
ξ	$-\dfrac{x}{2l(\alpha-\lambda)}$	$-\dfrac{y}{2l(\beta-\lambda)}$	$-\dfrac{z}{2l(\gamma-\lambda)}$,
η	$-\dfrac{x}{2m(\alpha-\mu)}$	$-\dfrac{y}{2m(\beta-\mu)}$	$-\dfrac{z}{2m(\gamma-\mu)}$,
ζ	$-\dfrac{x}{2n(\alpha-\nu)}$	$-\dfrac{y}{2n(\beta-\nu)}$	$-\dfrac{z}{2n(\gamma-\nu)}$.

Diese sind mit Substitution der Werthe (18) für x, y, z und (28) für l, m, n vollständig durch die elliptischen Coordinaten des Punktes P ausgedrückt zu denken. Von dem Verlauf der positiven Normalen der Coordinatenflächen geht, da er sich nach der Richtung der wachsenden elliptischen Coordinaten λ, μ, ν bestimmt, aus der gestaltlichen Beschreibung des confocalen Systems in § 4 (vgl. auch Fig. 4) noch eine andere Vorstellung hervor. Da nämlich von zwei Ellipsoiden das mit dem grösseren λ das innere ist, muss *die positive Normale* ξ *des Ellipsoides* λ *seine innere Normale* sein. Aus dem analogen Grunde ist *die positive Normale* ζ *des zweischaligen Hyperboloides* ν *seine äussere* (nach der convexen Seite laufende) *Normale.* Beim einschaligen Hyperboloide μ tritt, ebenso wie bei den schon genannten Flächen λ und ν, die positive Normale η nach der Seite des Mittelpunktes O aus der Fläche heraus.

Wenn im Vorstehenden für die Bestimmung der positiven Tangenten ξ, η, ζ der Coordinatenlinien die Parameterdarstellung (18) zu Grunde gelegt wird (vgl. Anm. IV, 6), so ist dabei vorausgesetzt, dass die Functionen (18) für benachbarte Werthe λ_1, μ_1, ν_1 von λ, μ, ν die Taylor'sche Entwicklung beziehungsweise nach ganzen Potenzen von $\lambda_1 - \lambda$, $\mu_1 - \mu$ und $\nu_1 - \nu$ zulassen. Diese Voraussetzungen sind für einen Punkt λ, μ, ν ausserhalb der drei Ebenen des Coordinatensystems $Oxyz$ überall erfüllt, sodass sich in erster Linie folgender Satz ergiebt:

I. *Das Axensystem* ξ, η, ζ *eines ausserhalb der drei Hauptebenen gelegenen Punktes* $P = \lambda, \mu, \nu$ *ist, durch die Formeln* (29), *eindeutig bestimmt. Es besteht aus den positiven Normalen der drei eigentlichen Coordinatenflächen im Punkte* P (vgl. § 4, zu II).

Ausserhalb der Coordinatenebenen haben zugleich die Grössen (28) bestimmte endliche Werthe und folgt daher (vgl. Anm. V, 3):

II. *Ein Linienelement mit den elliptischen Coordinaten* $\lambda, \mu, \nu, d\lambda, d\mu, d\nu$, *dessen Anfangspunkt ausserhalb der Coordinatenebenen liegt, hat die absolute Länge:*

(30) $$ds = \sqrt{l^2 d\lambda^2 + m^2 d\mu^2 + n^2 d\nu^2}$$

und seine Richtungscosinus p, q, r gegen die Axen ξ, η, ζ des Punktes λ, μ, ν haben die Werthe:

$$(31) \qquad p = \frac{l\,d\lambda}{ds}, \quad q = \frac{m\,d\mu}{ds}, \quad r = \frac{n\,d\nu}{ds}.$$

Die Charakteristik ($\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$) *des Linienelementes* (vgl. Anm. V, 4) *ist durch die Vorzeichen von $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ eindeutig bestimmt.*

Für einen Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ einer Hauptebene erleidet die Definition der Axen ξ, η, ζ als positiver Tangenten der Coordinatenlinien eine Störung. So ist beispielsweise für eine durch die Gleichungen (18) bei festen μ, ν dargestellte $\mu\nu$-Linie die dritte Coordinate z für benachbarte Werthe λ_1 des Werthes $\lambda = \gamma$ nicht nach ganzen Potenzen von $(\lambda_1 - \gamma)$ entwickelbar, wie denn im Punkte γ, μ, ν, wo λ einen Maximalwerth γ erreicht, eine bestimmte Richtung des wachsenden λ für die $\mu\nu$-Linie nicht existirt. Die Axen ξ, η, ζ werden in solchem Falle durch die Grenzwerthe der Ausdrücke (29) definirt. Nähert sich nämlich der Punkt λ, μ, ν dem Gebiete $\lambda = \gamma$ oder $\mu = \gamma$ der xy-Ebene, so erhalten die zuvor vollständig in λ, μ, ν dargestellten Richtungscosinus (29) bezüglich die folgenden Grenzwerthe:

$(29,\gamma)$	x	y	z		x	y	z
ξ	0	0	∓ 1	ξ	$-\frac{x}{2l(\alpha-\lambda)}$	$-\frac{y}{2l(\beta-\lambda)}$	0
η	$-\frac{x}{2m(\alpha-\mu)}$	$-\frac{y}{2m(\beta-\mu)}$	0	η	0	0	± 1
ζ	$-\frac{x}{2n(\alpha-\nu)}$	$-\frac{y}{2n(\beta-\nu)}$	0	ζ	$-\frac{x}{2n(\alpha-\nu)}$	$-\frac{y}{2n(\beta-\nu)}$	0,

wo in den dritten Verticalreihen das obere oder untere Vorzeichen gilt, jenachdem die Annäherung des Punktes an die Ebene $z = 0$ von der Seite der positiven oder negativen z-Axe her erfolgt, und wo die Werthe (18) und (28) von x, y, m, n mit $\lambda = \gamma$, resp. von x, y, l, n mit $\mu = \gamma$ reducirt zu denken sind. Was daher den Fall $\lambda = \gamma$ angeht, so wird die ξ-Axe zur Ebene der Grenzform $\lambda = \gamma$ der Ellipsoide senkrecht, aber von unbestimmter Pfeilspitze. Dagegen fallen die η- und ζ-Axe in die xy-Ebene und stehen nach der mit $z = 0$ $(\lambda = \gamma)$ reducirten ersten Formel (23) aufeinander senkrecht. Zugleich sind sie die positiven Normalen der ersten Hauptschnitte der Flächen μ und ν (vgl. Anm. I, 8, 29⁰), also die Axen des Punktes $\gamma, \mu, \nu = \lambda^{\cdot}, \mu^{\cdot}$ (vgl. § 6, IV) in dem elliptischen Coordinatensystem der xy-Ebene.

Gleicherweise erhalten wir aus (29) bei Annäherung des Punktes $P = \lambda$, μ, ν an die Gebiete $\mu = \beta$ und $\nu = \beta$ (vgl. Fig. 4) der xz-Ebene:

(29,β)

	x	y	z		x	y	z
ξ	$-\frac{x}{2l(\alpha-\lambda)}$	0	$-\frac{z}{2l(\gamma-\lambda)}$	ξ	$-\frac{x}{2l(\alpha-\lambda)}$	0	$-\frac{z}{2l(\gamma-\lambda)}$
η	0	∓ 1	0	η	$-\frac{x}{2m(\alpha-\mu)}$	0	$-\frac{z}{2m(\gamma-\mu)}$
ζ	$-\frac{x}{2n(\alpha-\nu)}$	0	$-\frac{z}{2n(\gamma-\nu)}$	ζ	0	± 1	0 ,

und bei Annäherung an die yz-Ebene:

(29,α)

	x	y	z
ξ	0	$-\frac{y}{2l(\beta-\lambda)}$	$-\frac{z}{2l(\gamma-\lambda)}$
η	0	$-\frac{y}{2m(\beta-\mu)}$	$-\frac{z}{2m(\gamma-\mu)}$
ζ	∓ 1	0	0 ,

wozu die entsprechenden Bemerkungen, wie vorhin, gelten. Die Zusammenfassung dieser Resultate giebt:

III. *Das Axensystem ξ, η, ζ eines in einer Hauptebene gelegenen Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$, der kein Focalpunkt ist, wird, durch die Formeln* (29,γ; β; α), *zweideutig bestimmt. Es besteht aus den positiven Normalen der beiden eigentlichen Coordinatenflächen im Punkte P und der mit unbestimmter Pfeilspitze genommenen Normale der Hauptebene selbst.*

Der Fall, wo P, ohne Focalpunkt zu sein, in einer Hauptaxe oder im Coordinatenanfang O liegt und das Axensystem ξ, η, ζ vier- oder achtdeutig wird, bedarf darnach keiner besonderen Hervorhebung.

IV. *Diejenigen beiden von den drei Axen ξ, η, ζ eines Punktes P in der 1., 2. oder 3. Hauptebene, welche in diese Ebene fallen, sind zugleich die Axen ξ, η des Punktes in dem ebenen elliptischen Coordinatensystem* (vgl. § 6, IV) *dieser Ebene.*

Für eine Hauptebene entsteht auch in den Formeln (30) und (31) eine Unregelmässigkeit. So wird für ein durch seine gewöhnlichen Coordinaten x, y, z, dx, dy, dz gegebenes Linienelement, dessen Anfangspunkt x, y, z innerhalb des Gebietes $\lambda = \gamma$ der Ebene $z = 0$ liegt, nach (25) stets $d\lambda = 0$ und nach (28) $l = \infty$, während sich für $ld\lambda$ aus (25) und (28) mit Benutzung von (18) der zweideutige Grenzwerth $ld\lambda = \pm dz$ ergiebt. Dies stimmt damit überein, dass in (31) $ld\lambda = pds$ die Projection des Linienelementes auf die ξ-Axe bedeutet, die jetzt nach (29,γ) mit der z-Axe parallel und von zweideutiger Pfeilspitze ist. In der Charakteristik ($\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$) des Elementes ist mit der Pfeilspitze der ξ-Axe, der Definition (vgl. Anm. V, 4) nach, auch das Symbol $\mathfrak{l}$ im Allgemeinen zweideutig, $= \pm$.

Wenn jedoch mit $z = 0$ nicht nur der Anfangspunkt des Elementes, sondern zugleich mit $dz = 0$ das ganze Element in der xy-Ebene liegt, wird das Symbol $\mathfrak{l}$ eindeutig, $= 0$. Analoges gilt für die Grenzwerthe von $md\mu$ und ndv bei unendlich werdendem m und n.

V. *Bei Benutzung der Grenzwerthe von $ld\lambda$, $md\mu$, ndv behalten die Formeln* (30) *und* (31) *auch für solche Linienelemente ihre Bedeutung, deren Anfangspunkt λ, μ, v, ohne Focalpunkt zu sein, in einer Hauptebene liegt. In der Charakteristik des Elementes ist das eine der drei Symbole $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ zweideutig oder null.*

Weitergehende Unregelmässigkeiten zeigen sich bei Focalpunkten. Tritt der Punkt $P = \lambda, \mu, v$ mit $\lambda = \mu = \gamma$ in die Focalellipse ein, so werden die Richtungscosinus der ξ- und η-Axe in (29) völlig unbestimmt, während diejenigen der ζ-Axe die Werthe erhalten:

(29,γ,γ)

	x	y	z
ζ	$-\frac{x}{2n(\alpha - v)}$	$-\frac{y}{2n(\beta - v)}$	0.

Die ζ-Axe fällt also in die xy-Ebene und steht nach § 7, 23, γ auf der Normale der Focalellipse (8) senkrecht. Ebenso bleibt für einen Punkt $\mu = v = \beta$ der Focalhyperbel nur die ξ-Axe mit:

(29,β, β)

	x	y	z
ξ	$-\frac{x}{2l(\alpha - \lambda)}$	0	$-\frac{z}{2l(\gamma - \lambda)}$

bestimmt, sodass sich der Satz ergiebt:

VI. *Das Axensystem ξ, η, ζ eines Punktes $P = \lambda, \mu, v$ auf der Focalellipse oder Focalhyperbel ist unendlich vieldeutig. Es besteht aus der positiven Normale der einzigen eigentlichen Coordinatenfläche im Punkte P, zugleich der Tangente des Focalkegelschnittes, und zwei in der Normalebene des letzteren beliebig anzunehmenden rechtwinkligen Axen.*

Wird der Grenzübergang auf $\lambda = \gamma$ und $\mu = \gamma$ in bestimmter Weise vollzogen, so können auch für einen Punkt der Focalellipse bestimmte Axen ξ, η gewonnen werden. Dienen beispielsweise nicht die Ausdrücke (29), sondern die Ausdrücke (29,γ) in der einen oder anderen Form als Ausgangspunkt, so fällt die eine der Axen ξ und η in die xy-Ebene und wird die andere zu dieser senkrecht. Es wird dann die Auffassung der räumlichen elliptischen Coordinaten der Punkte der xy-Ebene als ebener elliptischer Coordinaten $\lambda^\cdot$, $\mu^\cdot$ als maassgebend betrachtet, bei der die Focalellipse c keine besondere Rolle unter den Ellipsen des confocalen Systems (9,z) spielt.

Was die Projectionen $ld\lambda$, $md\mu$, ndv eines Linienelementes auf die Axen ξ, η, ζ in (30) und (31) angeht, so bleibt für die Focal-

ellipse nur $n d\nu$, für die Focalhyperbel nur $l d\lambda$ bestimmt, während die beiden anderen Projectionen, ebenso wie die Axen, auf welche die Projection geschieht, unbestimmt werden. Auch in diesen Fällen entsprechen also die Formeln (30) und (31) den thatsächlichen Verhältnissen. In der Charakteristik ($\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$) des Elementes werden zwei Symbole gleichzeitig mit den entsprechenden der Axen ξ, η, ζ völlig unbestimmt.

§ 10. Die Schnittpunkte einer geraden Linie mit dem confocalen System.

Jeder Punkt der Verbindungslinie zweier Punkte

$$P_1 = x_1, y_1, z_1 = \lambda_1, \mu_1, \nu_1 \quad \text{und} \quad P_2 = x_2, y_2, z_2 = \lambda_2, \mu_2, \nu_2$$

hat Coordinaten von der Form:

$$x = \frac{x_1 + \varrho x_2}{1+\varrho}, \quad y = \frac{y_1 + \varrho y_2}{1+\varrho}, \quad z = \frac{z_1 + \varrho z_2}{1+\varrho}$$

und liegt zwischen P_1 und P_2 bei positivem, ausserhalb P_1 und P_2 bei negativem ϱ. Die Werthe, welche ϱ für die Schnittpunkte der Geraden $P_1 P_2$ mit einer beliebigen Fläche τ des Systems (9) in § 3 hat, ergeben sich als Wurzeln einer quadratischen Gleichung*). Die beiden äusseren Coefficienten der letzteren gehen aus der linken Seite der Gleichung (9) hervor, indem darin x_1, y_1, z_1, resp. x_2, y_2, z_2 für x, y, z gesetzt wird. Ihr Product T drückt sich daher nach § 6, 15 durch die elliptischen Coordinaten der Punkte P_1 und P_2 in folgender Weise aus:

$$T = (\tau - \lambda_1)(\tau - \mu_1)(\tau - \nu_1) \cdot (\tau - \lambda_2)(\tau - \mu_2)(\tau - \nu_2).$$

Ist dieses Prodnct T negativ, so sind die beiden Wurzeln ϱ der erwähnten quadratischen Gleichung reell und verschiedenen Vorzeichens, also die Schnittpunkte der Geraden $P_1 P_2$ mit der Fläche τ des confocalen Systems reell und durch P_1 und P_2 voneinander getrennt.

Sei nun die betrachtete Fläche τ ein Ellipsoid λ und die Punkte P_1 und P_2 in den beiden Grenzformen $\lambda = -\infty$ und $\lambda = \gamma$ der Ellipsoide (vgl. § 4, 12) gelegen, also λ_1 dem Werthe $-\infty$ näher als jedes endliche λ, d. h. $\lambda - \lambda_1 > 0$, und $\lambda_2 = \gamma$, so wird nach § 4, 11:

$$T = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \mu_1)(\lambda - \nu_1) \cdot (\lambda - \gamma_2)(\lambda - \mu_2)(\lambda - \nu_2) < 0.$$

Ebenso ist mit $\tau = \mu$, $\mu_1 = \gamma$, $\mu_2 = \beta$:

$$T = (\mu - \lambda_1)(\mu - \gamma)(\mu - \nu_1) \cdot (\mu - \lambda_2)(\mu - \beta)(\mu - \nu_2) < 0$$

und endlich mit $\tau = \nu$, $\nu_1 = \beta$, $\nu_2 = \alpha$:

$$T = (\nu - \lambda_1)(\nu - \mu_1)(\nu - \beta) \cdot (\nu - \lambda_2)(\nu - \mu_2)(\nu - \alpha) < 0.$$

*) Vgl. Lindemann, a. § 1 a. O. S. 132.

Daraus folgt aber der Satz:

I. *Hat eine gerade Linie mit den beiden Grenzformen einer der drei Flächenschaaren* (12) *je einen Punkt P_1 und P_2 gemein, so schneidet sie jede eigentliche Fläche derselben Schaar in zwei reellen Punkten, die durch P_1 und P_2 getrennt werden.*

Die Gerade kann daher auch keine eigentliche Fläche dieser Schaar berühren.

Liegt nun eine Gerade weder in der unendlich fernen Ebene noch in der xy-Ebene, so kann sie mit den Grenzflächen $\lambda = -\infty$ und $\lambda = \gamma$ je nur einen Punkt D und C gemein haben, der als Schnittpunkt mit einer Doppelebene ($p^2 = 0$ und $z^2 = 0$) doppelt zählt. Durch jeden anderen Punkt der Geraden geht nach § 4, zu II, ein eigentliches Ellipsoid λ, während nach § 10, I jedes Ellipsoid λ jeden der beiden Abschnitte DC der Geraden stets einmal und nur einmal trifft. Die elliptische Coordinate λ des laufenden Punktes der Geraden bewegt sich also in einem solchen Abschnitte in der Richtung von D nach C einmal über alle Werthe von $-\infty$ bis γ. Nach § 8, I ferner verschwindet für ein Element $\lambda, \mu, \nu, d\lambda, d\mu, d\nu$ der Geraden die Coordinate $d\lambda$, ausser wenn der Anfangspunkt des Elementes in C fällt, niemals, da die Gerade keine eigentliche Fläche λ berührt. Für alle von D nach C gerichteten Elemente ist daher $d\lambda$ positiv:

II. *Schneidet eine Gerade die beiden Grenzformen $\lambda = -\infty$ und $\lambda = \gamma$ der Ellipsoide λ je in einem Punkte D und C, so ist für alle von D nach C gerichteten Elemente der beiden Abschnitte DC: $d\lambda > 0$.*

Liegt die Gerade ganz in der xy-Ebene und trifft sie die Grenzfläche $\lambda = \gamma$ überhaupt, so hat sie mit ihr im Allgemeinen einen ganzen Abschnitt gemein, längs dessen $d\lambda = 0$ ist. Der ausgesprochene Satz II erleidet daher eine Modification, die sich direct aus I ableiten lässt, aber in Folge der Beziehungen § 8, II auf den entsprechenden Satz über ebene elliptische Coordinaten (vgl. Anm. I, 9) zurückkommt.

Dagegen ergeben sich auf dieselbe Weise, wie Satz II, die folgenden Resultate, bei denen die Gerade im Unendlichen als geschlossen gedacht wird, sodass ein Abschnitt auf ihr auch durch das Unendliche hindurch gehen kann.

III. *Schneidet eine Gerade die beiden Grenzformen $\mu = \gamma$ und $\mu = \beta$ der einschaligen Hyperboloide μ je in einem Punkte C und B, so ist für alle von C nach B gerichteten Elemente der beiden Abschnitte CB: $d\mu > 0$.*

IV. *Schneidet eine Gerade der beiden Grenzformen $\nu = \beta$ und $\nu = \alpha$ der zweischaligen Hyperboloide je in einem Punkte B und A, so ist für alle von B nach A gerichteten Elemente der beiden Abschnitte BA: $d\nu > 0$.*

Drittes Capitel.

Focalkegel und Focallinien im confocalen System.

§ 11. Begriff und Hauptaxentransformation der Focalkegel.

Die beiden Kegel, welche von einem Punkte $P = x, y, z$ des Raumes über den beiden Focalkegelschnitten c und b eines Systems confocaler Ellipsoide und Hyperboloide errichtet wird, heissen die *Focalkegel des Punktes* P, der *Focalellipsenkegel* Pc und der *Focalhyperbelkegel* Pb.

Um die Gleichung des Kegels Pc in laufenden, auf das Axensystem $Oxyz$ bezogenen Coordinaten X, Y, Z zu erhalten, eliminiren wir aus den Gleichungen der Verbindungslinie zweier Punkte $P = x, y, z$ und $P' = x', y', z'$:

$$X - x : Y - y : Z - z = x' - x : y' - y : z' - z$$

unter der Bedingung, dass P' auf der Focalellipse liegt (vgl. § 2, 8):

$$\frac{x'^2}{\alpha - \gamma} + \frac{y'^2}{\beta - \gamma} = 1, \quad z' = 0$$

die Coordinaten x', y', z'. Darnach wird die Gleichung des Focalellipsenkegels Pc:

$$(32) \quad \frac{\{(Z-z)x - (X-x)z\}^2}{\alpha - \gamma} + \frac{\{(Z-z)y - (Y-y)z\}^2}{\beta - \gamma} - (Z-z)^2 = 0$$

und ebenso die Gleichung des Focalhyperbelkegels:

$$(32) \quad \frac{\{(Y-y)x - (X-x)y\}^2}{\alpha - \beta} + \frac{\{(Y-y)z - (Z-z)y\}^2}{\gamma - \beta} - (Y-y)^2 = 0.$$

Die erstere Gleichung (32) reducirt sich, wenn P in eine die Focalellipse nicht enthaltende Hauptebene, etwa die Ebene $y = 0$ fällt, auf:

$$(32') \quad \frac{\{(Z-z)x - (X-x)z\}^2}{\alpha - \gamma} + \frac{Y^2 z^2}{\beta - \gamma} - (Z-z)^2 = 0,$$

dagegen, wenn P in die Ebene $z = 0$ der Focalellipse eintritt, auf:

$$(32'') \quad \left(\frac{x^2}{\alpha - \gamma} + \frac{y^2}{\beta - \gamma} - 1\right) Z^2 = 0.$$

Liegt daher P selbst auf der Focalellipse, so wird die Gleichung des Focallelipsenkegels identisch in X, Y, Z erfüllt. *Wir betrachten als Focalellipsenkegel eines solchen Punktes das Geradenbündel mit dem Centrum* P. In analoger Weise verhält sich die zweite Gleichung (32) für besondere Lagen des Punktes x, y, z.

Um die Gleichungen (32) von dem ursprünglichen Coordinatensystem $Oxyz(OXYZ)$ auf die Axen ξ, η, ζ des Punktes P zu transformiren, dienen nach § 9, 29 die Formeln:

$$(33) \quad \begin{cases} X - x = -\frac{x}{2}\left\{\frac{\xi}{l(\alpha-\lambda)} + \frac{\eta}{m(\alpha-\mu)} + \frac{\zeta}{n(\alpha-\nu)}\right\}, \\ Y - y = -\frac{y}{2}\left\{\frac{\xi}{l(\beta-\lambda)} + \frac{\eta}{m(\beta-\mu)} + \frac{\zeta}{n(\beta-\nu)}\right\}, \\ Z - z = -\frac{z}{2}\left\{\frac{\xi}{l(\gamma-\lambda)} + \frac{\eta}{m(\gamma-\mu)} + \frac{\zeta}{n(\gamma-\nu)}\right\}. \end{cases}$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in die erste Gleichung (32) giebt:

$$\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)x^2 z^2\left\{\frac{\xi}{l(\alpha-\lambda)(\gamma-\lambda)} + \frac{\eta}{m(\alpha-\mu)(\gamma-\mu)} + \frac{\zeta}{n(\alpha-\nu)(\gamma-\nu)}\right\}^2$$
$$+\frac{1}{4}(\beta-\gamma)y^2 z^2\left\{\frac{\xi}{l(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)} + \frac{\eta}{m(\beta-\mu)(\gamma-\mu)} + \frac{\zeta}{n(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}\right\}^2$$
$$-\frac{1}{4} \quad z^2\left\{\frac{\xi}{l(\gamma-\lambda)} + \frac{\eta}{m(\gamma-\mu)} + \frac{\zeta}{n(\gamma-\nu)}\right\}^2 = 0,$$

oder nach ξ, η, ζ geordnet:

$$\frac{1}{4}z^2\left\{\left[\frac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\lambda)^2} + \frac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\lambda)^2} - 1\right]\frac{\xi^2}{l^2(\gamma-\lambda)^2}\right.$$
$$+\left[\frac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\mu)^2} + \frac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\mu)^2} - 1\right]\frac{\eta^2}{m^2(\gamma-\mu)^2}$$
$$+\left[\frac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\nu)^2} + \frac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\nu)^2} - 1\right]\frac{\zeta^2}{n^2(\gamma-\nu)^2}$$
$$+\left[\frac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)} + \frac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\mu)(\beta-\nu)} - 1\right]\frac{2\eta\zeta}{mn(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}$$
$$+\left[\frac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\nu)(\alpha-\lambda)} + \frac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\nu)(\beta-\lambda)} - 1\right]\frac{2\zeta\xi}{nl(\gamma-\nu)(\gamma-\lambda)}$$
$$\left.+\left[\frac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)} + \frac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)} - 1\right]\frac{2\xi\eta}{lm(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)}\right\} = 0.$$

Werden jetzt die Formeln $(22,z)$, (28), $(23,z)$ benutzt, der Werth (17) für z^2 eingesetzt und mit: $-(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$ multiplicirt, so reducirt sich diese Gleichung auf:

$$(34) \quad (\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\left\{\frac{\xi^2}{\gamma-\lambda} + \frac{\eta^2}{\gamma-\mu} + \frac{\zeta^2}{\gamma-\nu}\right\} = 0.$$

Vorstehende Transformation gilt für jeden Punkt $P = x, y, z = \lambda, \mu, \nu$ ausserhalb der Coordinatenebenen. Ist dagegen etwa $y = 0$, $\mu = \beta$, so sind die Formeln (33) nach $(29,\beta)$ durch folgende zu ersetzen:

$$(33,y) \quad \begin{cases} X - x = -\frac{x}{2}\left\{\frac{\xi}{l(\alpha-\lambda)} + \frac{\zeta}{n(\alpha-\nu)}\right\} \\ Y = \mp\eta \\ Z - z = -\frac{z}{2}\left\{\frac{\xi}{l(\gamma-\lambda)} + \frac{\zeta}{n(\gamma-\nu)}\right\} \end{cases}$$

und diese in die Gleichung (32′) zu substituiren. Darnach ergiebt sich:

$$\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)x^2z^2\left\{\frac{\xi}{l(\alpha-\lambda)(\gamma-\lambda)}+\frac{\zeta}{n(\alpha-\nu)(\gamma-\nu)}\right\}^2+\frac{z^2\eta^2}{\beta-\gamma}$$
$$-\tfrac{1}{4}z^2\left\{\frac{\xi}{l(\gamma-\lambda)}+\frac{\zeta}{n(\gamma-\nu)}\right\}^2=0,$$

oder

$$\frac{1}{4}z^2\left\{\left[\frac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\lambda)^2}-1\right]\frac{\xi^2}{l^2(\gamma-\lambda)^2}+\frac{4\eta^2}{(\beta-\gamma)}+\left[\frac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\nu)^2}-1\right]\frac{\zeta^2}{n^2(\gamma-\nu)^2}\right.$$
$$\left.+\left[\frac{(\alpha-\gamma)x^2}{(\alpha-\nu)(\alpha-\lambda)}-1\right]\frac{2\zeta\xi}{nl(\gamma-\nu)(\gamma-\lambda)}\right\}=0.$$

Jetzt kommen von den Formeln (22, z), (28) und (23, z) gerade nur diejenigen in Betracht, welche $\beta-\mu$ nicht in den Nennern enthalten. Im übrigen ergiebt sich wie vorhin:

$$(34') \qquad (\gamma-\lambda)(\gamma-\beta)(\gamma-\nu)\left\{\frac{\xi^2}{\gamma-\lambda}+\frac{\eta^2}{\gamma-\beta}+\frac{\zeta^2}{\gamma-\nu}\right\}=0,$$

d. h. die Gleichung (34) gilt auch für $\mu=\beta$. Ebenso wird ihre Giltigkeit für Punkte $\nu=\beta$ der xz- und für Punkte der yz-Ebene bewiesen. Bei der zu (34′) führenden Transformation kann nach Reduction aller benutzten Formeln mit $\mu=\beta$ nachher auch noch $\nu=\beta$ gesetzt werden, einem Punkte P auf der Focalhyperbel entsprechend. Nur ist das damit eingeführte Axensystem ξ, η, ζ kein nothwendiges, sondern nur eine der unendlich vielen möglichen Formen des Axensystems ξ, η, ζ im Punkte λ, β, β (vgl. § 9, VI). Indessen ist die resultirende Gleichung (34′) mit $\nu=\beta$, da sie η und ζ nur in der Verbindung $\eta^2+\zeta^2$ enthält, für alle diese möglichen Formen dieselbe.

Ist endlich P im Gebiete $\lambda=\gamma$ oder $\mu=\gamma$ der xy-Ebene gelegen, so haben wir nur in der Gleichung (32″) $Z=\mp\xi$ oder $Z=\pm\eta$ zu setzen (vgl. § 9, 29, γ) und erhalten mit Hinblick auf § 6, 15, γ

$$(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\xi^2=0 \quad \text{oder} \quad (\gamma-\lambda)(\gamma-\nu)\eta^2=0,$$

d. h. die Gleichung (34) gilt auch für $\lambda=\gamma$ oder $\mu=\gamma$. Aber auch für $\lambda=\gamma$ und $\mu=\gamma$ wird sie, wie (32″), eine Identität.

Da analoge Entwickelungen für die zweite Gleichung (32) gelten, können wir allgemein den folgenden Satz aussprechen:

I. *Die Gleichungen des Focalellipsenkegels Pc und des Focalhyperbelkegels Pb eines beliebigen Punktes $P=\lambda, \mu, \nu$ lauten in Bezug auf die Axen ξ, η, ζ des Punktes:*

$$(34) \qquad \begin{cases}(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\left\{\dfrac{\xi^2}{\gamma-\lambda}+\dfrac{\eta^2}{\gamma-\mu}+\dfrac{\zeta^2}{\gamma-\nu}\right\}=0,\\[2ex](\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\left\{\dfrac{\xi^2}{\beta-\lambda}+\dfrac{\eta^2}{\beta-\mu}+\dfrac{\zeta^2}{\beta-\nu}\right\}=0.\end{cases}$$

Aus der Form dieser Gleichungen geht nun unmittelbar der Satz hervor:

II. *Die beiden Focalkegel des Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ haben dessen Axen ξ, η, ζ als Hauptaxen.*

Um die Gestalt der beiden Kegel näher zu bezeichnen, bringen wir die beiden letzten Flächenschaaren § 5, 12‴ durch Aenderung der Bezeichnungen:

$$\alpha' \quad \beta' \quad \gamma' \quad \mu' \quad \nu' \quad x \quad y \quad z$$

in

$$\nu \quad \mu \quad \lambda \quad \gamma \quad \beta \quad \zeta \quad \eta \quad \xi$$

auf die folgende Form:

(12, P) *Kegel um die ξ-Axe:*

$$\gamma = \lambda : \xi^2 = 0,$$

$$\lambda < \gamma < \mu : \frac{\xi^2}{\lambda - \gamma} + \frac{\eta^2}{\mu - \gamma} + \frac{\zeta^2}{\nu - \gamma} = 0,$$

$$\gamma = \mu : \frac{\xi^2}{\lambda - \mu} + \frac{\zeta^2}{\nu - \mu} \leqq 0, \; \eta^2 = 0.$$

Kegel um die ζ-Axe:

$$\beta = \mu : \frac{\xi^2}{\lambda - \mu} + \frac{\zeta^2}{\nu - \mu} \geqq 0, \; \eta^2 = 0,$$

$$\mu < \beta < \nu : \frac{\xi^2}{\lambda - \beta} + \frac{\eta^2}{\mu - \beta} + \frac{\zeta^2}{\nu - \beta} = 0,$$

$$\beta = \nu : \zeta^2 = 0.$$

Hiernach sind aber die beiden Focalkegel zwei bestimmte Kegel in einem System confocaler Kegel, dessen Constanten ν, μ, λ die elliptischen Coordinaten des laufenden Punktes P und dessen Parameter γ, β sind. Für einen Punkt P ausserhalb der Ebenen der Focalkegelschnitte c und b ($\lambda < \gamma < \mu$, $\mu < \beta < \nu$) sind beide Kegel (34) ungleichnamige eigentliche Kegel des confocalen Systems (12, P). Für einen Punkt der xy-Ebene, $\lambda = \gamma$ oder $\mu = \gamma$, giebt die erste Gleichung (34) $\xi^2 = 0$ oder $\eta^2 = 0$. Die letztere Gleichung $\eta^2 = 0$ ist aber, da die von einem Punkte P ausserhalb der Focalellipse nach den Punkten dieser gezogenen Verbindungslinien nicht die ganze xy-Ebene, sondern nur zwei entgegengesetzte von den vier Winkelräumen bedecken, in welche die von P an die Focalellipse gezogenen Tangenten:

$$\frac{\xi^2}{\lambda - \gamma} + \frac{\zeta^2}{\nu - \gamma} = 0, \quad \eta = 0 \quad \text{(vgl. Anm. I, 10 u. § 6, IV)}$$

die Ebene zerlegen, im Sinne der Grenzform $\gamma = \mu$ der Tabelle (12, P) aufzufassen. Der Focalhyperbelkegel ist auch für $\lambda = \gamma$ oder $\mu = \gamma$ ein eigentlicher Kegel der zweiten Schaar (12, P).

Für einen Punkt der xz-Ebene, $\mu = \beta$ oder $\nu = \beta$, ist ebenso der Focalellipsenkegel (34) ein eigentlicher Kegel der ersten Schaar (12, P), der Focalhyperbelkegel aber bezüglich die Grenzform $\beta = \mu$ oder $\beta = \nu$ der zweiten Schaar. Allgemein folgt daher:

III. *Die beiden Focalkegel eines Punktes P, der kein Focalpunkt ist, sind stets zwei ungleichnamige Kegel eines Systems confocaler Kegel.*

Für die ausgeschlossenen Punkte ergiebt sich aus (34) sofort (vgl. auch die Schlussbemerkung von § 5):

IV. *Für einen Punkt P auf der Focalellipse oder Focalhyperbel ist der gleichnamige Focalkegel unbestimmt (ein Geradenbündel), der ungleichnamige ein Rotationskegel mit der Tangente des Focalkegelschnittes im Punkte P als Rotationsaxe.*

Die Definition der Focalkegel Pc und Pb im Anfange des § 11 soll auch für die drei speciellen confocalen Systeme gelten. Ohne hier auf die analytische Darstellung der Kegel einzugehen, geben wir nur eine Beschreibung ihrer Formen.

Bei dem ersten speciellen confocalen Systeme (vgl. Fig. 1′) fällt der Focalhyperbelkegel Pb für jeden Punkt P ausserhalb der Focalaxe b in die Meridianebene des Punktes hinein und wird für einen Punkt auf der Focalaxe unbestimmt (ein Geradenbündel). Der Focalellipsenkegel Pc, der Kegel über dem Focalkreis c, ist für jeden Punkt P ausserhalb der Aequatorebene ein eigentlicher Kegel 2. Ordnung, dessen drei Hauptaxen die zwei Axen des Punktes in dem confocalen Kegelschnittsysteme (3, 9_0) der Meridianebene (vgl. Anm. I, 8) und die Normale der letzteren sind; insbesondere ist er für einen Punkt der Focalaxe selbst ein Rotationskegel, dessen Rotationsaxe mit der Focalaxe zusammenfällt. Für einen Punkt P der Aequatorebene fällt er selbst in diese und bedeckt sie vollständig oder nur einen Winkelraum in ihr, jenachdem P innerhalb oder ausserhalb des Focalkreises liegt (wie vorhin in den Bemerkungen zu 12, P). Für einen Punkt des Focalkreises wird er ein Geradenbündel.

Bei dem zweiten speciellen confocalen System (vgl. Fig. 1″) fallen beide Focalkegel Pb und Pc eines Punktes P ausserhalb der Rotationsaxe in die Meridianebene des Punktes, indem jeder von ihnen zwei entgegengesetzte der vier Winkelräume doppelt überdeckt, in welche diese Ebene von den Geraden PC_0 und PC_0' getheilt wird. Die drei Hauptaxen beider Kegel sind die zwei Axen des Punktes in dem confocalen Kegelschnittsystem (9_0) der Meridianebene (vgl. Anm. I, 8) und die Normale der letzteren. Für einen Punkt des inneren Focalaxenstückes c oder der äusseren Focalaxenstücke b wird der gleichnamige Focalkegel Pc oder Pb unbestimmt, während der ungleich-

namige sich auf die Rotationsaxe zusammenzieht. Für die Hauptbrennpunkte C_0, C_0' werden beide Focalkegel unbestimmt.

Bei dem dritten speciellen confocalen System (vgl. Fig. 1‴) schrumpft der Focalellipsenkegel eines Punktes P auf die Doppelgerade PO zusammen und zerfällt der Focalhyperbelkegel in ein Ebenenpaar mit der Axe PO. Für einen Punkt P des Focalaxenpaares b löst sich Pb, für den Punkt O auch Pc in ein Geradenbündel auf.

§ 12. Begriff und Darstellung der Focallinien.

Eine gerade Linie, welche sowohl den einen als auch den anderen der beiden Focalkegelschnitte eines Systems confocaler Ellipsoide und Hyperboloide (vgl. Fig. 1) schneidet, heisst eine Focallinie des Systems.

Durch einen Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$, der kein Focalpunkt ist $(\lambda < \mu,\ \mu < \nu)$, geht eine begrenzte Anzahl von Focallinien, die Schnittlinien seiner beiden Focalkegel (34). Die Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes einer solchen Schnittlinie, dessen absolute Entfernung von P mit σ bezeichnet werde, genügen den drei Gleichungen:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \sigma^2,$$

$$(\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)\left\{\frac{\xi^2}{\gamma - \lambda} + \frac{\eta^2}{\gamma - \mu} + \frac{\zeta^2}{\gamma - \nu}\right\} = 0,$$

$$(\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu)\left\{\frac{\xi^2}{\beta - \lambda} + \frac{\eta^2}{\beta - \mu} + \frac{\zeta^2}{\beta - \nu}\right\} = 0.$$

Dies sind aber mit der Bezeichnungsänderung § 11 zu (12, P), der wir noch die Aenderung von $(\alpha - \lambda)$ in σ^2 hinzufügen, die Gleichungen der drei Coordinatenflächen (16‴) in § 6 des dort betrachteten dritten speciellen elliptischen Coordinatensystems, welche durch den Punkt ξ, η, ζ hindurchgehen. Die Auflösungen der drei Gleichungen nach ξ^2, η^2, ζ^2 sind daher nach § 6, 17‴:

$$\xi^2 = \sigma^2 \frac{(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)}{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}, \quad \eta^2 = \sigma^2 \frac{(\beta - \mu)(\gamma - \mu)}{(\nu - \mu)(\lambda - \mu)}, \quad \zeta^2 = \sigma^2 \frac{(\beta - \nu)(\gamma - \nu)}{(\lambda - \nu)(\mu - \nu)}.$$

Hier sind aber nach der Bedeutung von σ die Quotienten $\xi : \sigma$, $\eta : \sigma$, $\zeta : \sigma$ die Richtungscosinus des von P nach dem Punkte ξ, η, ζ gezogenen Strahles, so dass wir das Resultat so aussprechen können:

I. *Die Richtungscosinus p, q, r einer Focallinie des Punktes λ, μ, ν, der kein Focalpunkt ist, gegen seine Axen ξ, η, ζ sind durch die Gleichungen bestimmt:*

$$(35) \qquad p^2 = \frac{(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)}{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}, \quad q^2 = \frac{(\beta - \mu)(\gamma - \mu)}{(\nu - \mu)(\lambda - \mu)}, \quad r^2 = \frac{(\beta - \nu)(\gamma - \nu)}{(\lambda - \nu)(\mu - \nu)}.$$

Da bei einem Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ ausserhalb der Ebenen der Focalkegelschnitte die Werthe γ und β für λ, μ, ν nicht vorkommen, die Axen ξ, η, ζ aber nach § 9, I; III, eventuell von der Pfeilspitze abgesehen, vollständig bestimmt sind, so ergiebt sich aus (35) zuerst:

II. *Durch jeden Punkt ausserhalb der Ebenen der Focalkegelschnitte gehen vier getrennte Focallinien.*

Für $\lambda = \gamma$ oder $\mu = \gamma$ wird $p = 0$ oder $q = 0$, so dass nach § 9, 29, γ die vier Focallinien, paarweise zusammenfallend, in die xy-Ebene zu liegen kommen. Nach ihrer Definition müssen sie dann durch die Scheitelpunkte B_0, B_0' der Focalhyperbel (vgl. Fig. 1), die einzigen in der xy-Ebene liegenden Punkte dieser, hindurchgehen. Entsprechend in der xz-Ebene.

III. *Durch jeden Punkt in der Ebene eines Focalkegelschnittes, der nicht selbst Focalpunkt ist, gehen zwei Focallinien, die Focallinien des Punktes in dem confocalen Kegelschnittsysteme* (9, z) *oder* (9, y) *der betreffenden Ebene* (vgl. Anm. I, 10).

Für einen Punkt der x-Axe fallen diese zwei Focallinien ihrerseits wieder in eine einzige zusammen.

Unmittelbar aus der Definition der Focallinien folgt endlich:

IV. *Durch jeden Punkt eines Focalkegelschnittes gehen einfach unendlich viele Focallinien, die Erzeugenden des Rotationskegels* (vgl. § 11, IV) *von dem Punkte über dem anderen Focalkegelschnitt.*

Auch diese sind die Schnittlinien der beiden Focalkegel des Punktes, wenn der eine, wie festgesetzt, als Geradenbündel aufgefasst wird.

Die unendlich vielen Focallinien eines Focalpunktes, etwa des Punktes $P = \lambda, \beta, \beta$ bilden nach (34), wenn $\lambda \neq \gamma$ ist, den Kegel:

$$(34'') \qquad \frac{\xi^2}{\gamma - \lambda} + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{\gamma - \beta} = 0.$$

Für den Richtungscosinus $p = \xi : \sigma$ einer solchen Focallinie gegen die ξ-Axe ergiebt sich aber aus der Gleichung (34″) und der Definitionsgleichung von σ^2 (vgl. § 12, Anf.) durch Elimination von $\eta^2 + \zeta^2$ dieselbe Formel, welche aus der ersten Formel (35) mit $\mu = \nu = \beta$ entsteht. Die letztere gilt also auch für den betrachteten Fall, während die beiden letzten Formeln (35) mit $\mu = \nu = \beta$ unbestimmt werden, in Uebereinstimmung mit dem Unbestimmtwerden der Axen η und ζ. In diesem Sinne gelten die Formeln (35) auch für einen Focalpunkt.

Auch auf die speciellen confocalen Systeme wenden wir die Definition der Focallinien an, indem wir die besondere in § 11 beschriebene Form der Focalkegel beachten.

Bei dem ersten speciellen System (vgl. Fig. 1′) sind die Focallinien eines Punktes ausserhalb der Rotationsaxe die Verbindungs-

linien des Punktes mit den beiden in seiner Meridianebene liegenden Punkten des Focalkreises; es sind zugleich die Focallinien, welche dem Punkte P in dem confocalen Kegelschnittsystem (9_0) der Meridianebene zukommen. Zu ihrer analytischen Bestimmung kann daher auf die Ebene verwiesen werden (vgl. Anm. I, 10; 11). Für einen Punkt P der Focalaxe b erfüllen die Focallinien den geraden Kreiskegel von P über dem Focalkreis.

Für das zweite specielle System (vgl. Fig. 1″) haben die beiden Focalkegel Pc und Pb eines Punktes ausserhalb der Rotationsaxe nur die beiden Verbindungslinien des Punktes P mit den Hauptbrennpunkten C_0 und C_0' gemein, welche wie vorhin zugleich die Focallinien des Punktes P in dem confocalen Kegelschnittsystem (9_0) seiner Meridianebene sind. Für einen Punkt der Rotationsaxe existirt nur eine in die Axe selbst fallende Focallinie, ausser für die Hauptbrennpunkte, deren Focallinien je ein Geradenbündel bilden.

Für das dritte specielle confocale System bleibt als Focallinie eines Punktes P nur seine Verbindungslinie mit dem Mittelpunkte O übrig.

§ 13. Die Focalhalbstrahlen eines Punktes.

Die Focallinien eines Punktes P stimmen nach (35) in den Quadraten ihrer Richtungscosinus p, q, r gegen die Axen ξ, η, ζ überein. Ihre Unterscheidung beruht auf den Vorzeichen $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ der drei Richtungscosinus, die aber ihrerseits nicht blos eine durch P gehende Focallinie, sondern einen von P ausgehenden Focalhalbstrahl (vgl. Anm. IV, 2; 3) charakterisiren. Wir nennen daher die Zusammenstellung der drei Vorzeichen: $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ die *Charakteristik des Focalhalbstrahles im Punkte P.* Es soll also z. B. $\mathfrak{l} = +$ oder $-$ oder 0 sein, je nachdem p positiv oder negativ oder null ist. Aus (35) folgt unmittelbar:

I. *Die Richtungscosinus eines Focalhalbstrahles eines Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ gegen die Axen ξ, η, ζ des letzteren sind:*

$$(36)\quad p = \mathfrak{l}\sqrt{\frac{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}},\quad q = \mathfrak{m}\sqrt{\frac{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}},\quad r = \mathfrak{n}\sqrt{\frac{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}},$$

wo $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ die Charakteristik des Focalhalbstrahles im Punkte P ist.

Zur Abkürzung sollen die den acht Charakteristiken entsprechenden Focalhalbstrahlen in folgender Weise benannt werden:

$$(37)\quad \begin{cases} +f_1 = (+\,+\,+) & +f_2 = (+\,+\,-) \\ -f_1 = (-\,-\,-) & -f_2 = (-\,-\,+) \\ +f_3 = (+\,-\,+) & +f_4 = (+\,-\,-) \\ -f_3 = (-\,+\,-) & -f_4 = (-\,+\,+). \end{cases}$$

Je zwei entgegengesetzte Focalhalbstrahlen $+f_i$ und $-f_i$ bilden zusammen eine Focallinie f_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Zusammengehörig in Bezug auf eine Halbaxe des Axensystems $P\xi\eta\zeta$ heissen zwei Focalhalbstrahlen, deren Winkel (vgl. Anm. IV, 2) von der Halbaxe halbirt wird. Folgende Paare sind in Bezug auf die positiven Halbaxen ξ, η, ζ zusammengehörig (vgl. Fig. 5):

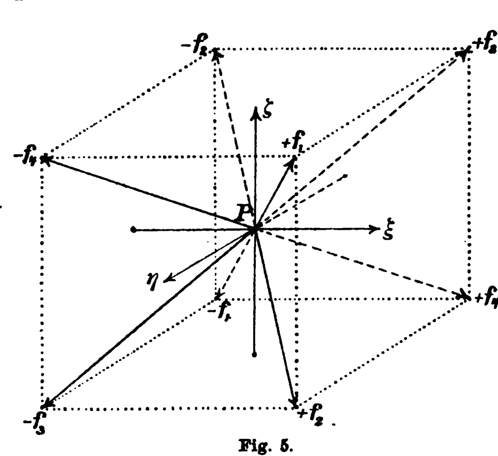


Fig. 5.

$$(38)\ \begin{cases} \left.\begin{array}{l} +f_2 \text{ und } +f_3 \\ +f_1 \text{ und } +f_4 \end{array}\right\} \text{i. B. a. } \xi, \\ \left.\begin{array}{l} -f_3 \text{ und } +f_1 \\ +f_2 \text{ und } -f_4 \end{array}\right\} \text{i. B. a. } \eta, \\ \left.\begin{array}{l} +f_1 \text{ und } -f_2 \\ +f_3 \text{ und } -f_4 \end{array}\right\} \text{i. B. a. } \zeta, \end{cases}$$

die je entgegengesetzten Paare in Bezug auf die negativen Halbaxen ξ, η, ζ.

Zusammengehörig in Bezug auf eine Ebene des Axensystems $P\xi\eta\zeta$ heissen zwei Focalhalbstrahlen, von denen der eine das Spiegelbild des anderen in Bezug auf die Ebene ist. Folgende Paare sind in Bezug auf die drei Ebenen $\eta\zeta$, $\zeta\xi$ und $\xi\eta$ zusammengehörig:

$$(39)\ \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \pm f_2 \text{ und } \mp f_3 \\ \pm f_1 \text{ und } \mp f_4 \end{array}\right\} \text{i. B. a. } \eta\zeta, \quad \left.\begin{array}{l} \pm f_3 \text{ und } \pm f_1 \\ \pm f_2 \text{ und } \pm f_4 \end{array}\right\} \text{i. B. a. } \zeta\xi, \\ \qquad \left.\begin{array}{l} \pm f_1 \text{ und } \pm f_2 \\ \pm f_3 \text{ und } \pm f_4 \end{array}\right\} \text{i. B. a. } \xi\eta, \end{cases}$$

wo die unteren und oberen Vorzeichen bezüglich zusammengehören.

Diese Anordnung der acht Focalhalbstrahlen gilt zunächst für einen Punkt P ausserhalb der Ebenen des Axensystems $Oxyz$.

In einem Punkte P der yz-Ebene ist die Pfeilspitze der zu ihr senkrechten ζ-Axe (vgl. § 9, 29, α) und damit auch das dritte Symbol $\mathfrak{n}$ in der Charakteristik eines Focalhalbstrahles zweideutig. Je nachdem der laufende Punkt P von der Seite der positiven oder negativen x-Axe in die yz-Ebene eintritt, ist die ζ-Axe mit der negativen oder positiven x-Axe gleichgerichtet. Im ersteren Falle liegen daher bei Zugrundelegung der Bezeichnung (37) die Focalhalbstrahlen

$$+f_1, \quad +f_3, \quad -f_2, \quad -f_4$$

in dem Halbraum der negativen,

$$+f_2,\quad +f_4,\quad -f_1,\quad -f_3$$

in dem Halbraum der positiven x-Axe, im letzteren Falle umgekehrt. Beim Durchgang des Punktes P durch die yz-Ebene springt die eine Bezeichnung der acht Focalhalbstrahlen in die andere derart über, dass je zwei in Bezug auf die $yz = \xi\eta$-Ebene zusammengehörige Focalhalbstrahlen (vgl. (39)) ihre Bezeichnung vertauschen.

Beim Eintritt dagegen des laufenden Punktes P in die xy- oder xz-Ebene fallen nach (36) jedesmal zwei solche Focalhalbstrahlen zusammen, welche in Bezug auf die zu gleicher Zeit in die xy- oder xz-Ebene hineinfallende Ebene des Axensystems $P\xi\eta\zeta$ zusammengehörig sind. Wir bringen dies in der Charakteristik dadurch zum Ausdruck, dass wir das vor dem Zusammenfall unterscheidende Symbol durch 0 ersetzen, so dass die in den einzelnen Gebieten

$$\lambda = \gamma,\quad \mu = \gamma,\quad \mu = \beta,\quad \nu = \beta$$

der genannten Ebenen verbleibenden Focalhalbstrahlen folgende Charakteristiken erhalten:

$$(40)\quad \begin{cases} \lambda = \gamma & \begin{cases} +f_1 = -f_4 = (0++), & +f_2 = -f_3 = (0+-), \\ -f_1 = +f_4 = (0--), & -f_2 = +f_3 = (0-+), \end{cases} \\ \mu = \gamma, \beta & \begin{cases} +f_1 = +f_3 = (+0+), & +f_2 = +f_4 = (+0-), \\ -f_1 = -f_3 = (-0-), & -f_2 = -f_4 = (-0+), \end{cases} \\ \nu = \beta & \begin{cases} +f_1 = +f_2 = (++0), & +f_3 = +f_4 = (+-0), \\ -f_1 = -f_2 = (--0), & -f_3 = -f_4 = (-+0). \end{cases} \end{cases}$$

Wenn hier z. B. für $\mu = \gamma$: $+f_1 = +f_3 = (+0+)$ gesetzt ist, so bedeutet dies, dass der in der $\xi\zeta = xy$-Ebene liegende Focalhalbstrahl $+f_1 = +f_3$ mit jeder der beiden positiven Halbaxen ξ und ζ einen spitzen Winkel bildet ($p > 0$, $r > 0$). Der Focalhalbstrahl $+f_1 = +f_3$ fällt aber nach § 12, III in eine der Focallinien des Punktes P in dem System confocaler Kegelschnitte $(9, z)$ und die Axen ξ und ζ nach § 9, IV in die Axen ξ, η des Punktes in demselben System (vgl. Anm. I, 8). Daher hat der Focalhalbstrahl $+f_1 = +f_3$ als Focalhalbstrahl im System $(9, z)$ die Charakteristik $(++)$ (vgl. Anm. I, 11). Auf gleiche Weise folgt allgemein:

II. *Wird das Symbol* 0 *in der Charakteristik eines Focalhalbstrahles eines Punktes der 1. oder 2. Hauptebene im confocalen Flächensystem* (9) *weggelassen, so geht die Charakteristik in diejenige über, welche der Focalhalbstrahl in dem confocalen Kegelschnittsystem* $(9, z)$ *oder* $(9, y)$ *dieser Ebene hat.*

Was endlich die unendlich vielen Focalhalbstrahlen eines Punktes P auf einem Focalkegelschnitt angeht, welche nach § 12, IV einen

Rotationskegel bilden, so ordnen sie sich in zwei Reihen, jenachdem sie dem einen oder anderen Mantel des Rotationskegels angehören. In der Charakteristik werden zwei Symbole unbestimmt, so dass wir sie mit $(\cdot\cdot\mathfrak{n})$ für einen Punkt P der Focalellipse, mit $(\mathfrak{l}\cdot\cdot)$ für einen Punkt der Focalhyperbel bezeichnen können. Ein Focalhalbstrahl $(\cdot\cdot+)$ bildet mit der positiven ζ-Axe (vgl. § 9, 29, γ, γ) einen spitzen, ein Focalhalbstrahl $(\cdot\cdot-)$ einen stumpfen Winkel.

§ 14. Das Focallinienelement und die Aenderung seiner Charakteristik längs einer Focallinie.

Die Charakteristik $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ eines Focalhalbstrahles im Punkte $P = x, y, z = \lambda, \mu, \nu$ ist ihrer Definition nach (vgl. § 13) zugleich diejenige seines Anfangselementes, d. h. des Linienelementes

$$x, y, z, dx, dy, dz = \lambda, \mu, \nu, d\lambda, d\mu, d\nu,$$

welches mit dem Focalhalbstrahl gleichen Anfangspunkt und gleiche Richtungscosinus hat. Die Richtungscosinus eines solchen Elementes gegen die Axen ξ, η, ζ können daher einerseits durch (36), andererseits durch (31) dargestellt werden, womit sich der Satz ergiebt:

I. *Zwischen den elliptischen Coordinaten $\lambda, \mu, \nu, d\lambda, d\mu, d\nu$ und der absoluten Länge ds eines Focallinienelementes von der Charakteristik* $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ *bestehen die Gleichungen:*

$$(41)\qquad \begin{cases} \dfrac{l\,d\lambda}{ds} = \mathfrak{l}\sqrt{\dfrac{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}}, \quad \dfrac{m\,d\mu}{ds} = \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}}, \\ \qquad\qquad \dfrac{n\,d\nu}{ds} = \mathfrak{n}\sqrt{\dfrac{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}}. \end{cases}$$

Die Formeln bestimmen bei gegebenem Anfangspunkt λ, μ, ν und gegebener Charakteristik $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ eindeutig die Verhältnisse der drei Coordinaten $d\lambda, d\mu, d\nu$ zur absoluten Länge ds, solange λ, μ, ν ausserhalb der Coordinatenebenen liegt, bestimmen aber auch, wenn λ, μ, ν in eine Hauptebene fällt, ohne Focalpunkt zu werden, die Grenzwerthe der Producte $l\,d\lambda$, $m\,d\mu$, $n\,d\nu$, und zwar eindeutig für die Hauptebenen der Focalkegelschnitte, zweideutig für die yz-Ebene. Fällt nämlich der Punkt λ, μ, ν etwa in das Gebiet $\lambda = \gamma$ der xy-Ebene, so giebt die erste Formel (41) $l\,d\lambda = 0$, was nach § 9 vor V die Bedeutung: $\pm dz = 0$ hat. Das Linienelement fällt gleichzeitig mit seinem Anfangspunkt λ, μ, ν selbst in die xy-Ebene und in seiner Charakteristik wird $\mathfrak{l} = 0$, übereinstimmend mit (40). Fällt dagegen der Punkt λ, μ, ν in die yz-Ebene mit $\nu = \alpha$, so giebt die dritte Formel (41) für das Product $n\,d\nu$, welches nach § 9 vor V die Bedeutung $\pm dx$ hat, ebenfalls einen von 0 verschiedenen zweideutigen Werth, da

das Symbol $\mathfrak{n}$ nach § 13 in der yz-Ebene $\neq 1$ ist. Das Linienelement fällt also nicht wie sein Anfangspunkt in die yz-Ebene, und in seiner Charakteristik bleibt das Symbol $\mathfrak{n}$ zweideutig. Für einen Focalpunkt λ, μ, ν werden jedesmal in zweien von den Formeln (41) beide Seiten unbestimmt und behält nur eine Formel ihre Bedeutung.

Unter Benutzung der Werthe (28) von l, m, n nehmen die Formeln (41) für Punkte λ, μ, ν ausserhalb der Hauptebenen, da *die Producte* $\mathfrak{l}\,d\lambda$, $\mathfrak{m}\,d\mu$, $\mathfrak{n}\,d\nu$ *positiv sind*, die Form an:

$$\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}\frac{\mathfrak{l}\,d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda}}=ds,\quad \frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}\frac{\mathfrak{m}\,d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}}=ds,$$

$$\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}\frac{\mathfrak{n}\,d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}}=ds.$$

Werden diese Gleichungen beziehungsweise mit den Factoren:

$$(\mu-\nu)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda),\ (\nu-\lambda)(\beta-\mu)(\gamma-\mu),\ (\lambda-\mu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu),$$

deren Summe $=-(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)$ ist, multiplicirt und addirt, so folgt:

$$(42)\qquad ds=\frac{\mathfrak{l}\,d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda}}+\frac{\mathfrak{m}\,d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}}+\frac{\mathfrak{n}\,d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}}.$$

II. *Die absolute Länge* ds *eines Focallinienelementes mit den elliptischen Coordinaten* $\lambda, \mu, \nu, d\lambda, d\mu, d\nu$ *und der Charakteristik* $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ *hat den Werth* (42).

Die Formel gilt auch, wenn der Anfangspunkt λ, μ, ν des Focallinienelementes und damit, wie bemerkt, das Element selbst in die Ebene eines Focalkegelschnittes fällt. Denn sie reducirt sich beispielsweise mit $\lambda=\gamma$, womit zugleich $d\lambda=0$, bezüglich $\mathfrak{l}=0$ wird, auf

$$ds=\frac{\mathfrak{m}\,d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}}+\frac{\mathfrak{n}\,d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}}.$$

Die Richtigkeit dieser Formel folgt aber nach § 8, II und § 13, II aus der Theorie der elliptischen Coordinaten $\lambda^{\cdot}$, $\mu^{\cdot}$ der xy-Ebene (vgl. Anm. I, 12).

Dagegen werden für $\nu=\alpha$ das dritte und für $\lambda=\mu=\gamma$ oder $\mu=\nu=\beta$ je zwei Glieder der Formel (42) unbestimmt.

Eine nicht in der Ebene eines Focalkegelschnittes gelegene Focallinie schneidet jeden der beiden Focalkegelschnitte b und c in einem Punkte B und C, zugleich ihrem Schnittpunkte mit der Ebene $y=0$ und $z=0$. Da B niemals in der yz-Ebene und C niemals in der unendlich fernen Ebene liegt (vgl. Fig. 1), kann die Focallinie in keiner dieser Ebenen enthalten sein und schneidet daher jene in einem Punkte A, diese in einem Punkte D.

Nach § 10, II—IV ist längs der beiden Abschnitte von D nach C der im Unendlichen geschlossen gedachten Focallinie beständig $d\lambda > 0$, längs der beiden Abschnitte von C nach B $d\mu > 0$ und längs der beiden Abschnitte von B nach A $d\nu > 0$. Innerhalb eines der vier Abschnitte, in welche die Focallinie durch die vier Punkte A, B, C, D getheilt wird, haben somit alle ihre Elemente bei übereinstimmender Richtung auch dieselbe Charakteristik, die nur durch Umkehr der Richtung in die entgegengesetzte verwandelt wird. In diesem Sinne gelten für jeden solchen Abschnitt zwei bestimmte entgegengesetzte Charakteristiken. Um diese wirklich anzugeben, müssen wir drei Typen von Focallinien unterscheiden, jenachdem der Punkt A zwischen den stets getrennten Punkten B und C oder ausserhalb dieser auf Seite von B oder auf Seite von C liegt. Für diese drei Typen gelten dann die in der folgenden schematischen Darstellung angegebenen Charakteristiken längs der einzelnen Abschnitte, jede in der durch den beigesetzten Pfeil bezeichneten Richtung:

$$(43)\left\{\begin{array}{l}
\overset{D}{\bullet}\;\underset{---}{\longleftarrow}\;\overset{+++}{\longrightarrow}\;\overset{A}{\bullet}\;\underset{--+}{\longleftarrow}\;\overset{++-}{\longrightarrow}\;\overset{B}{\bullet}\;\underset{-+-}{\longleftarrow}\;\overset{+-+}{\longrightarrow}\;\overset{C}{\bullet}\;\underset{+--}{\longleftarrow}\;\overset{-++}{\longrightarrow}\;\overset{D}{\bullet}\\
\overset{D}{\bullet}\;\underset{--+}{\longleftarrow}\;\overset{++-}{\longrightarrow}\;\overset{B}{\bullet}\;\underset{-+-}{\longleftarrow}\;\overset{+-+}{\longrightarrow}\;\overset{A}{\bullet}\;\underset{-++}{\longleftarrow}\;\overset{+--}{\longrightarrow}\;\overset{C}{\bullet}\;\underset{+-+}{\longleftarrow}\;\overset{-+-}{\longrightarrow}\;\overset{D}{\bullet}\\
\overset{D}{\bullet}\;\underset{-+}{\longleftarrow}\;\overset{++-}{\longrightarrow}\;\overset{B}{\bullet}\;\underset{-+-}{\longleftarrow}\;\overset{+-+}{\longrightarrow}\;\overset{C}{\bullet}\;\underset{+--}{\longleftarrow}\;\overset{-++}{\longrightarrow}\;\overset{A}{\bullet}\;\underset{+-+}{\longleftarrow}\;\overset{-+-}{\longrightarrow}\;\overset{D}{\bullet}\,.
\end{array}\right.$$

Wird also die Focallinie in einer bestimmten Richtung durchlaufen, so ändern sich in der Charakteristik $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ des ebenso gerichteten Elementes in C die Vorzeichen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$, in B $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$, in A nur $\mathfrak{n}$, während in C selbst $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$, in B $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ unbestimmt, in A aber $\mathfrak{n}$ zweideutig $(\pm)$ ist.

Beim Zusammenfall der Punkte A und C oder A und D oder B und D scheidet nun der betreffende Abschnitt aus dem Schema (43) aus. Die Punkte A und B, B und C, C und D können niemals zusammen fallen.

Für die in der xy- und xz-Ebene verlaufenden Focallinien gilt das Schema (43) deshalb nicht mehr, weil sie zwei Punkte C oder zwei Punkte B enthalten, ihre Schnittpunkte mit dem Focalkegelschnitt der betreffenden Ebene. Eine Focallinie der xy-Ebene ist aber nach § 12, III zugleich Focallinie in dem confocalen Kegelschnittsystem $(9, z)$ mit den Brennpunkten B_0, B_0' und hat daher in diesem (vgl. Anm. I, 13) die Charakteristiken:

$$(43_0)\quad \overset{D}{\bullet}\;\underset{--}{\longleftarrow}\;\overset{++}{\longrightarrow}\;\overset{A}{\bullet}\;\underset{-+}{\longleftarrow}\;\overset{+-}{\longrightarrow}\;\overset{B}{\bullet}\;\underset{+-}{\longleftarrow}\;\overset{-+}{\longrightarrow}\;\overset{D}{\bullet}\,,$$

wobei B entweder B_0 oder B_0' bedeutet.

Ihre Schnittpunkte mit der Focalellipse c, welche eine eigentliche Ellipse des Systems $(9,z)$ ist, liegen nach Anm. I, 9, I durch die Punkte B und D getrennt. Haben sie nun gegen A etwa die in (43′) vorausgesetzte Lage, so ergeben sich aus (43_0) die Charakteristiken der einzelnen Abschnitte im Raume:

$$(43')\quad D \;\underset{-0-}{\overset{+0+}{\longleftrightarrow}}\; A \;\underset{-0+}{\overset{+0-}{\longleftrightarrow}}\; C \;\underset{0-+}{\overset{0+-}{\longleftrightarrow}}\; B \;\underset{0+-}{\overset{0-+}{\longleftrightarrow}}\; \dot{C} \;\underset{+0-}{\overset{-0+}{\longleftrightarrow}}\; D$$

da im Abschnitte CBC nach (40) $\mathfrak{l} = 0$ und im Abschnitte CDC $\mathfrak{m} = 0$ ist (vgl. § 13, II). In den Punkten C geht also nur das Vorzeichen des Differentials $d\lambda\cdot$ von $d\lambda$ auf $d\mu$ oder von $d\mu$ auf $d\lambda$ über. Analog verhält sich eine Focallinie der xz-Ebene, auf welcher zwei Schnittpunkte B mit der Focalhyperbel b nach Anm. I, 9, I durch die Punkte C (C_0 oder C_0') und A getrennt sind.

§ 15. Die Schnittpunkte der Focallinien eines Punktes mit den Focalkegelschnitten.

Die Schnittpunkte einer Focallinie f_i (vgl. § 13) eines Punktes P, der in keiner der Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ noch auch in der unendlich fernen Ebene liegt, mit den vier genannten Ebenen seien A_i, B_i, C_i, D_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Die Charakteristiken der Focalhalbstrahlen $+f_i$ im Punkte P:

$$+f_1 = (+++),\quad +f_2 = (++-),\quad +f_3 = (+-+),\quad +f_4 = (+--)$$

sind (vgl. § 14, Anf.) zugleich die Charakteristiken der Anfangselemente der Focalhalbstrahlen. Das Anfangselement von $+f_1$ hat somit die Charakteristik $(+++)$. Da diese aber nur auf dem ersten Abschnitte des ersten Typus (43) in der Richtung von D nach A vorkommt, muss die Focallinie f_1 des Punktes P von jenem ersten Typus sein, P selbst aber im Abschnitt D_1A_1 liegen und der Focalhalbstrahl $+f_1$ von P an zuerst A_1, dann B_1, dann C_1 erreichen. Dieses Resultat bezeichnen wir kurz durch die Formel: $f_1 = PA_1B_1C_1$, indem wir damit die Reihenfolge der vier Punkte P, A_1, B_1, C_1 auf der Focallinie f_1 in der mit dem positiven Focalhalbstrahl $+f_1$ übereinstimmenden Richtung angeben. Bei den anderen Focallinien f_i ergeben sich mit Hinblick auf die Tabelle (43) je mehrere Möglichkeiten für den Typus der Focallinie f_i und die Lage des Anfangselementes des Focalhalbstrahles $+f_i$ in einem gewissen Abschnitt derselben und zwar in der bei f_1 eingeführten Schreibweise zusammengefasst:

Die Reihenfolge der Punkte P, A_i, B_i, C_i auf den vier Focallinien f_i eines Punktes P ausserhalb der Hauptebenen, in der Richtung des positiven Focalhalbstrahles $+f_i$ angegeben, ist die folgende:

$$(44)\quad \begin{cases} f_1 = PA_1B_1C_1, \\ f_2 = A_2PB_2C_2 \text{ oder } PB_2A_2C_2 \text{ oder } PB_2C_2A_2, \\ f_3 = A_3B_3PC_3 \text{ oder } B_3PA_3C_3 \text{ oder } PC_3A_3B_3 \text{ oder } B_3PC_3A_3 \\ \qquad\qquad\qquad \text{ oder } PA_3C_3B_3, \\ f_4 = PC_4B_4A_4 \text{ oder } B_4A_4PC_4 \text{ oder } A_4PC_4B_4. \end{cases}$$

Trotz der verschiedenen Möglichkeiten lassen sich aus dieser Tabelle die für die weitere Entwicklung nothwendigen Schlüsse ziehen. Zunächst folgen in allen Fällen (44) die Punkte C_i dem Punkte P nach, d. h.

I. *Die vier positiven Focalhalbstrahlen* $+f_i$ *des Punktes* P *treffen stets die Focalellipse* c.

Ferner stehen B_1 vor C_1 und B_2 vor C_2, dagegen B_3, B_4 entweder nach C_3, C_4 oder, wenn vor C_3, C_4, dann auch vor P, d. h.

II. *Die beiden Focalhalbstrahlen* $+f_1$ *und* $+f_2$ *treffen zuerst die Focalhyperbel* b, *dann die Focalellipse* c; *die beiden Focalhalbstrahlen* $+f_3$ *und* $+f_4$ *treffen zuerst die Focalellipse* c, *die Focalhyperbel erst nachher oder überhaupt nicht.*

In der Folge sollen zwei Punkte oder Curvenzüge *gleichseitig* oder *ungleichseitig* heissen, jenachdem sie auf gleicher oder ungleichen Seiten der yz-Ebene liegen. Da nun nach (44) zwischen P und B_1 der Punkt A_1, zwischen P und B_2 niemals der Punkt A_2 liegt, so folgt:

III. *Von den beiden zuerst die Focalhyperbel treffenden Focalhalbstrahlen* $+f_1$ *und* $+f_2$ *trifft* $+f_1$ *den mit* P *ungleichseitigen,* $+f_2$ *den mit* P *gleichseitigen Zweig der Focalhyperbel.*

Und weiter aus dem Anblick der Formeln (44):

IV. *Von den beiden zuerst die Focalellipse treffenden Focalhalbstrahlen* $+f_3$ *und* $+f_4$ *trifft* $+f_4$ *stets die mit* P *gleichseitige,* $+f_3$ *aber entweder die gleichseitige oder die ungleichseitige Hälfte der Focalellipse. Ferner trifft entweder* $+f_3$ *den mit* P *ungleichseitigen oder* $-f_3$ *den gleichseitigen und entweder* $+f_4$ *den gleichseitigen oder* $-f_4$ *den ungleichseitigen Zweig der Focalhyperbel.*

Liegen jetzt für einen Punkt P die vier Focallinien, sei es an einem räumlichen Modell (vgl. § 23), sei es in einer Zeichnung (vgl. Fig. 6) construirt vor (vgl. Anm. VI, 1), so ermöglichen die vorstehenden Sätze die Benennung (37) der Focalhalbstrahlen zu bestimmen, welche ursprünglich an die analytische Darstellung (36) angeknüpft wurde. Denn aus Satz I geht hervor, welches die positiven Focalhalbstrahlen $+f_i$ sind; aus II die Trennung der Paare $+f_1$,

$+f_2$ und $+f_3$, $+f_4$ voneinander; aus III die Unterscheidung von $+f_1$ und $+f_2$; endlich aus IV die Unterscheidung von $+f_3$ und $+f_4$ (vgl. Fig. 6).

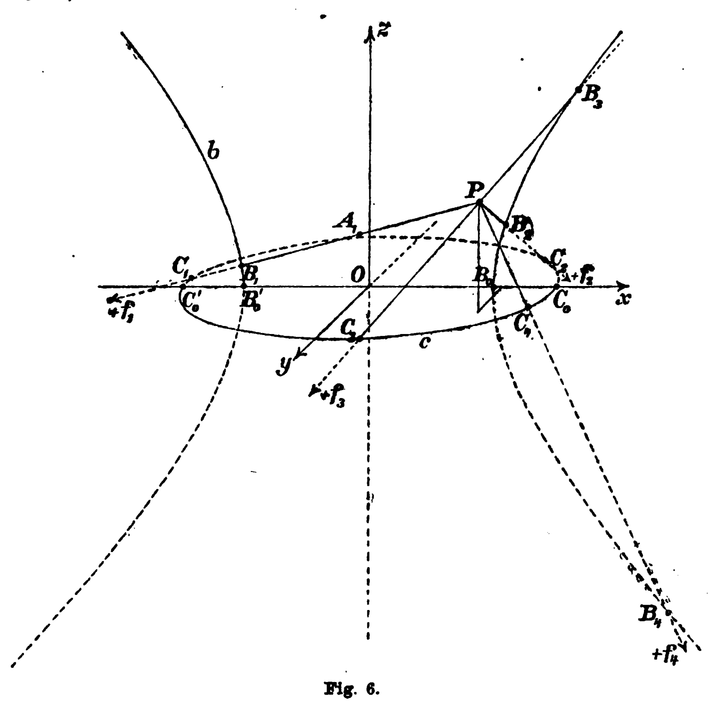


Fig. 6.

Alle diese Betrachtungen beziehen sich zunächst auf einen Punkt P ausserhalb der Hauptebenen.

Tritt der Punkt P in die yz-Ebene ein, so fallen in (44) die Möglichkeiten aus, wo die Punkte P und A_i durch einen der Punkte B_i oder C_i getrennt sind, und bleibt mit $A_i = P$ nur übrig:

$$(44, \alpha) \quad \begin{cases} f_1 = PB_1C_1, \quad f_2 = PB_2C_2, \\ f_3 = B_3PC_3 \text{ oder } PC_3B_3, \quad f_4 = B_4PC_4 \text{ oder } PC_4B_4. \end{cases}$$

In der That sind jetzt nach § 13 die Halbstrahlen $+f_1$ und $+f_3$ die Spiegelbilder von $+f_2$ und $+f_4$ in Bezug auf die yz-Ebene und vertauschen beim Durchgang des Punktes P durch die Ebene diese und jene ihre Bezeichnung miteinander.

Wenn der Punkt P in eine der beiden Ebenen der Focalkegelschnitte zu liegen kommt, gehen die vier Focallinien paarweise zusammenfallend in die beiden Focallinien des betreffenden confocalen Kegelschnittsystems über, sodass über ihre Lage selbst nichts zu sagen bleibt. Es kommt nur darauf an, ihre Punkte A, B, C als Grenzlagen

der im Allgemeinen der Tabelle (44) entsprechenden Punkte A, B, C zu kennzeichnen.

V. *Wir benennen mit B_0 und C_0 die mit P gleichseitigen, mit B_0' und C_0' die mit P ungleichseitigen Hauptbrennpunkte.*

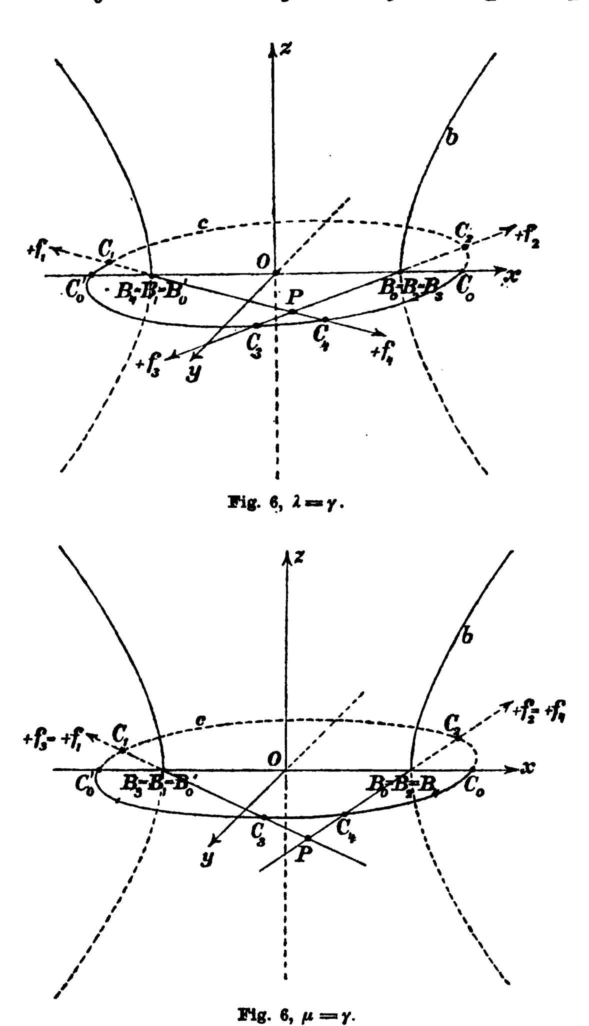


Fig. 6, $\lambda = \gamma$.

Fig. 6, $\mu = \gamma$.

Wir können dann, wie schon für Fig. 6, auch für die weiteren Darstellungen ohne Beschränkung P rechts von der yz-Ebene annehmen.

Tritt nun $P = \lambda, \mu, \nu$ in die xy-Ebene ein, so fallen nach § 13, 40 seine acht Focalhalbstrahlen paarweise in die vier Focalhalbstrahlen hinein, welche der Punkt P in dem confocalen Kegelschnittsystem (9, z) der xy-Ebene besitzt. Was im Besonderen die vier positiven Focalhalbstrahlen angeht, so laufen für $\lambda = \gamma$ (nach § 13, 40 und Anm. I, 14): $+f_1$ von P nach B_0', $+f_2$ von P nach B_0, $+f_4$ und $+f_3$ von P nach den mit $+f_1$ und $+f_2$ entgegengesetzten Richtungen (vgl. Fig. 6, $\lambda = \gamma$), für $\mu = \gamma$: $+f_1$ und $+f_3$ nach B_0' und $+f_2$ und $+f_4$ nach B_0 (vg. Fig. 6, $\mu = \gamma$). Für $\lambda = \gamma$ treffen die vereinigten Focallinien $\pm f_1 = \mp f_4$ oder $\pm f_2 = \mp f_3$ die Focalhyperbel nur in einem Punkte B_0' oder B_0, die Focalellipse aber in zwei Punkten, einem jenseitigen d. h. durch B_0' oder B_0 von P getrennten (vgl. § 14, 43') und einem diesseitigen d. h. mit P auf gleicher Seite von B_0' oder B_0 gelegenen. Während daher, beim Uebergang

von einem ausserhalb der xy-Ebene liegenden Nachbarpunkte zu dem betrachteten Punkte P dieser Ebene, B_0' die gemeinsame Grenzlage

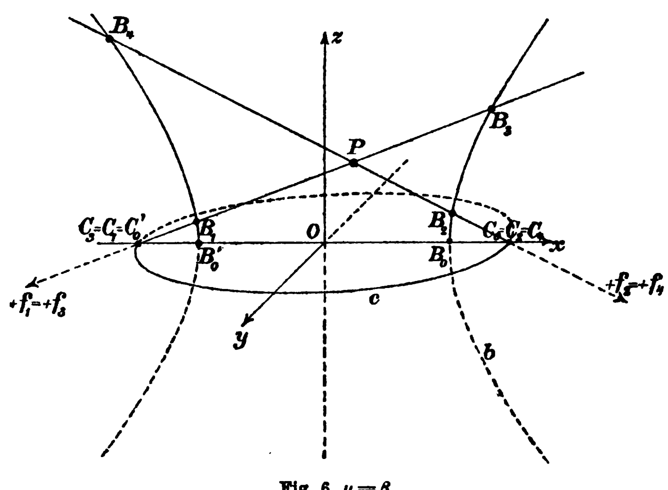


Fig. 6, $\mu = \beta$.

der Schnittpunkte B_1 (vgl. § 15, III) und B_4 der beiden eben noch getrennten Focallinien f_1 und f_4 mit der Focalhyperbel ist, so sind die beiden Schnittpunkte der vereinigten Focallinie $\pm f_1 = \mp f_4$ mit der Focalellipse (vgl. Fig. 6, $\lambda = \gamma$) die Grenzlagen der Schnittpunkte C_1 und C_4 der eben noch getrennten Focallinien f_1 und f_4 (vgl. Fig. 6) mit dieser; und zwar der jenseitige Schnittpunkt die Grenzlage von C_1, der diesseitige von C_4, da nach § 15, II zwischen P und C_1 stets der Punkt B_1, zwischen C und C_4 niemals der Punkt B_4 liegt. Ebenso ist auf

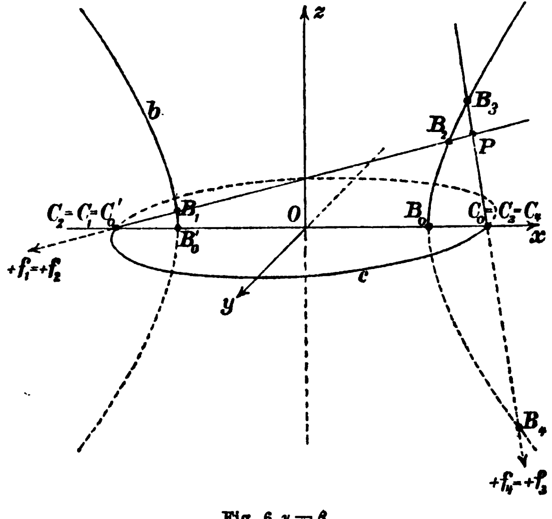


Fig. 6, $\nu = \beta$.

$$\pm f_2 = \mp f_3$$

(vgl. Fig. 6, $\lambda = \gamma$) B_0 die Grenzlage von B_2 und B_3, ferner der diesseitige Schnittpunkt mit der Focalellipse die Grenzlage von C_3, der jenseitige von C_2. Dementsprechend sind in Fig. 6, $\lambda = \gamma$ die Punkte

B und C mit den Indices 1, 2, 3, 4 derart bezeichnet, wie sie als Grenzlagen der gleichbezeichneten Punkte in Fig. 6 hervorgehen; ebenso beziehen sich die drei folgenden Figuren auf die Fälle $\mu = \gamma$, $\mu = \beta$, $\nu = \beta$.

Indem in diesem Sinne je zwei zusammengefallene Focallinien noch immer als getrennt aufgefasst werden, *bleiben die Sätze* I—IV, *bezüglich die Formeln* (44) *auch für Punkte der beiden ersten Hauptebenen*, vorausgesetzt dass es keine Focalpunkte sind, *bestehen.*

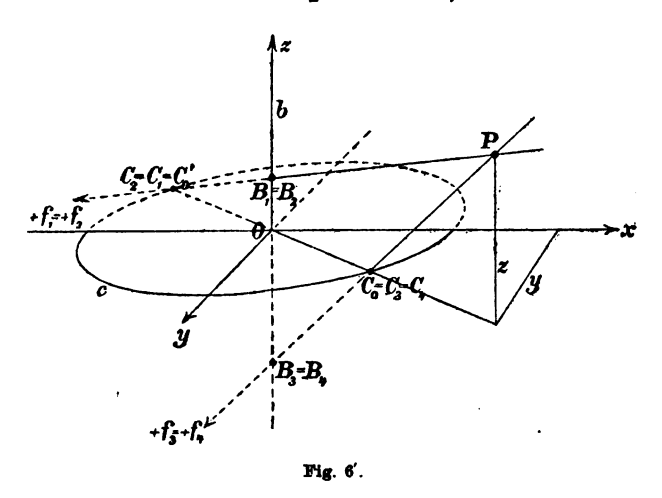


Fig. 6′.

Auch bei den *speciellen confocalen Systemen*, deren Focalkegelschnitte in Fig. 1′, 1″, 1‴ dargestellt wurden, sind die Focallinien als solche (vgl. §12) ohne weiteres gegeben und handelt es sich nur um den Grenzübergang von dem allgemeinen Falle der Fig. 6 aus.

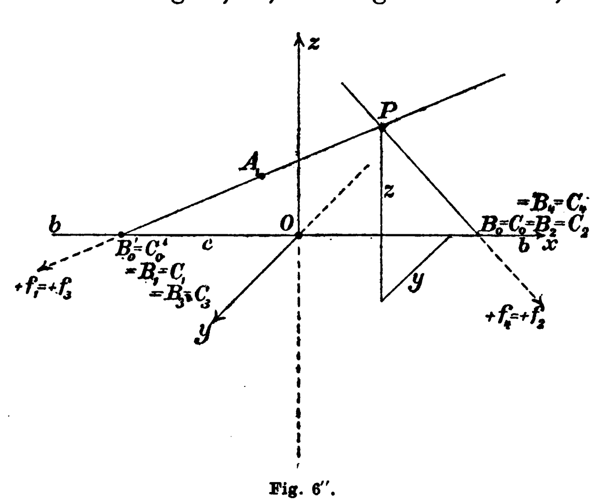


Fig. 6″.

Bei dem *ersten speciellen System* bezeichnen wir die beiden Schnittpunkte der Meridianebene des Punktes P mit dem Focalkreise c (vgl. Fig. 6′) mit C_0 und C_0', und zwar den *in Bezug auf die Focalaxe b diesseitigen* mit C_0, den *jenseitigen* mit C_0'. Von den hierdurch bestimmten Focal-

linien PC_0' und PC_0 schneidet jene die Focalaxe b zwischen P und C_0', diese ausserhalb der Strecke PC_0. Nach § 15, I. II ist daher der Halbstrahl PC_0' aus $+f_1$ und $+f_2$, der Halbstrahl PC_0 aus $+f_3$ und $+f_4$ des allgemeinen Falles (vgl. Fig. 6) hervorgegangen. Ersichtlich ist Fig. 6′ als ein Specialfall von Fig. 6, $\nu = \beta$ zu betrachten.

Bei dem *zweiten speciellen System* sei $B_0 = C_0$ der in Bezug auf die yz-Ebene mit P gleichseitige und $B_0' = C_0'$ der mit P ungleichseitige Hauptbrennpunkt (vgl. Fig. 6″). Von den alsdann nach § 15, I bestimmten positiven Focalhalbstrahlen PC_0' und PC_0 schneidet jener den ungleichseitigen, dieser den gleichseitigen Zweig der in die äusseren Focalaxenstücke ausgearteten Focalhyperbel b. Nach § 15, III und IV ist daher PC_0' aus $+f_1$ und $+f_3$, PC_0 aus $+f_2$ und $+f_4$ des allgemeinen Falles (vgl. Fig. 6) hervorgegangen. Ersichtlich ist Fig. 6″ ein Specialfall von Fig. 6, $\mu = \gamma$ und Fig. 6, $\mu = \beta$.

Bei dem *dritten speciellen System*, wo sich die Focalellipse auf den Mittelpunkt O zusammengezogen hat, fallen alle vier positiven Focalhalbstrahlen $+fi$ des allgemeinen Falles in dem Halbstrahl PO zusammen.

Viertes Capitel.

Die Theorie der gebrochenen Focaldistanzen.

§ 16. Gebrochene Entfernungen und Gleichgewichtsdistanzen über eine Curve.

Eine Curve c im Raume sei durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

mit dem Parameter t dargestellt und zwei feste Punkte P_1 und P_2 seien durch ihre Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 gegeben (vgl. Fig. 7). Werden P_1 und P_2 mit einem beliebigen Punkte $P = x, y, z$ der Curve geradlinig verbunden, so soll die gebrochene Linie P_1PP_2 eine *gebrochene Entfernung der Punkte P_1 und P_2 über die Curve* und P ihr *Gleitpunkt* heissen. Durch Verschiebung des Gleitpunktes längs der Curve er-

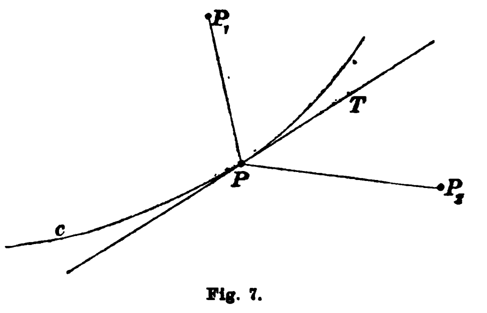


Fig. 7.

geben sich andere und andere gebrochene Entfernungen der beiden Punkte. Wenn nun die Halbirungslinie der beiden von P nach P_1 und P_2 laufenden Halbstrahlen (vgl. Anm. IV, 4) auf der Tangente T der Curve im Punkte P senkrecht steht oder, um den Fall unbestimmter Halbirungslinie einzuschliessen, der Winkel beider Halbstrahlen ein gestreckter ist, soll die gebrochene Entfernung P_1PP_2 als eine *Gleichgewichtsdistanz der Punkte P_1 und P_2 über die Curve* bezeichnet werden. Um diese Benennung zu motiviren, denken wir uns (vgl. Fig. 8) die im Raume feste Curve c von dünnem, glattem Draht gebildet und ihren laufenden Punkt P durch einen kleinen Ring vorgestellt, der auf sie aufgesteckt und auf ihr ohne Reibung verschiebbar ist. Ein unausdehnbarer, vollkommen biegsamer Faden werde nun mit dem einen Ende in dem festen Punkte P_1 befestigt, dann durch den Ring P, weiter durch einen zweiten an der Stelle P_2 befestigten Ring frei gleitend hindurchgeführt und schliesslich an dem freien Ende durch eine Kraft R von beliebiger Richtung und Grösse, etwa ein Gewicht gespannt. Das entstehende Fadenpolygon ist dann und nur dann im Gleichgewicht, wenn die gebrochene Linie P_1PP_2 eine Gleichgewichtsdistanz im Sinne der obigen Definition ist. Da nämlich der Faden durch die beiden Ringe P und P_2 frei gleiten soll, so ist die Spannung längs des ganzen Fadens dieselbe und gleich R*). Daher wirkt der gespannte Faden auf den Ring P mit zwei gleichgrossen Spannungen in der Richtung der von P fortlaufenden Fadenstücke PP_1 und PP_2. Die Resultante beider Spannungen fällt in den Halbstrahl, welcher den Winkel der Halbstrahlen PP_1 und PP_2 halbirt. Da der Ring P aber auf der Curve c beweglich ist, ist zum Gleichgewichte nothwendig und hinreichend, dass die Resultante in die Normalebene der Curve fällt. In dem besonderen Falle, wo der genannte Winkel π ist, verschwindet die Resultante und findet aus diesem Grunde Gleichgewicht statt.

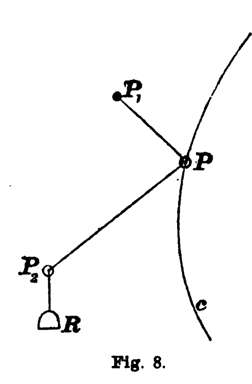


Fig. 8.

Um die analytische *Bedingungsgleichung* der Gleichgewichtsdistanz P_1PP_2 herzustellen, bezeichnen wir mit s_1 und s_2 die absoluten Längen der Strecken PP_1 und PP_2 und mit ω den Winkel zwischen den Halbstrahlen PP_1 und PP_2. Die Richtungscosinus der Halbirungslinie des Winkels ω sind, wenn $\omega \neq \pi$ ist (vgl. Anm. IV, 4):

---

*) Vgl. Poisson Traité de mécanique, 2ième éd. (Paris 1833), t. I, S. 560; Lagrange, Mécanique analytique, 4ième éd. (Paris 1888), t. I, S. 134; Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Bd. II (Leipzig 1880), S. 85, § 11.

$$\frac{1}{2\cos\frac{\omega}{2}}\left(\frac{x_1-x}{s_1}+\frac{x_2-x}{s_2}\right),\quad \frac{1}{2\cos\frac{\omega}{2}}\left(\frac{y_1-y}{s_1}+\frac{y_2-y}{s_2}\right),$$
$$\frac{1}{2\cos\frac{\omega}{2}}\left(\frac{z_1-z}{s_1}+\frac{z_2-z}{s_2}\right)$$

und die der positiven Tangente der Curve (vgl. Anm. IV, 6 mit den dort angegebenen Voraussetzungen):

$$\frac{x'}{s'},\quad \frac{y'}{s'},\quad \frac{z'}{s'},\quad s'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

wo mit dem Accente die Differentiation nach t bezeichnet wird. Dann und nur dann, wenn die Gleichung:

$$\left(\frac{x_1-x}{s_1}+\frac{x_2-x}{s_2}\right)\frac{x'}{s'}+\left(\frac{y_1-y}{s_1}+\frac{y_2-y}{s_2}\right)\frac{y'}{s'}+\left(\frac{z_1-z}{s_1}+\frac{z_2-z}{s_2}\right)\frac{z'}{s'}=0$$

besteht, ist demnach entweder die Halbirungslinie zur Tangente senkrecht oder, indem die drei Klammerausdrücke verschwinden, $\omega=\pi$.

Bedeuten ω_1 und ω_2 die Winkel der Halbstrahlen PP_1 und PP_2 gegen die positive Tangente T, so kann die gefundene Bedingungsgleichung auch in der Form:

$$\cos\omega_1+\cos\omega_2=0$$

oder (vgl. Anm. IV, 2) in der Form:

$$\omega_1+\omega_2=\pi$$

dargestellt werden. Sie lautet daher in Worten: Die gebrochene Entfernung P_1PP_2 der Punkte P_1 und P_2 über die Curve c ist eine Gleichgewichtsdistanz, wenn der eine der beiden Halbstrahlen PP_1 und PP_2 gegen die positive Tangente der Curve c im Gleitpunkte P denselben Winkel bildet, wie der andere gegen die negative. Dieser Satz ist gleichbedeutend mit dem folgenden:

I. *Die gebrochene Entfernung P_1PP_2 der Punkte P_1 und P_2 über die Curve c ist eine Gleichgewichtsdistanz, wenn die beiden Halbstrahlen PP_1 und PP_2 verschiedenen Mänteln des Rotationskegels angehören, der den Gleitpunkt als Spitze, die Tangente der Curve in ihm als Axe hat und durch den einen Halbstrahl bestimmt ist; und umgekehrt.*

II. *Die äussersten Grenzformen des Rotationskegels, die Tangente einerseits und die Normalebene andererseits, sind dabei inbegriffen.*

In der Normalebene fallen bei der zweiten Grenzform beide Mäntel des Rotationskegels zusammen, sodass wenn der eine Halbstrahl in dieser liegt, nur gefordert wird, dass auch der andere in ihr liegt, wobei im Besonderen auch beide Halbstrahlen zusammenfallen können.

Die Länge der gebrochenen Entfernung P_1PP_2 der Punkte P_1 und P_2 über die Curve c:

$$s_1 + s_2 = S(t)$$

ist eine Function des laufenden Punktes P der Curve und daher ihres Parameters t. Bei Benutzung der Ausdrücke von s_1 und s_2 durch die Coordinaten der Punkte P_1, P und P_2 (vgl. Anm. IV, 5) zeigt sich, dass die vorhin aufgestellte Bedingungsgleichung der Gleichgewichtsdistanz mit der Bedingung:

$$S'(t) = 0$$

gleichbedeutend ist. Da sie entweder für einzelne Werthe von t oder identisch in t erfüllt sein kann, ergeben sich die beiden Sätze:

III. *Die Länge der gebrochenen Entfernung P_1PP_2 der Punkte P_1 und P_2 über die Curve kann nur dann ein Maximum oder Minimum sein, wenn P_1PP_2 eine Gleichgewichtsdistanz ist.*

IV. *Die Länge der gebrochenen Entfernung P_1PP_2 der Punkte P_1 und P_2 über die Curve ist constant, wenn P_1PP_2 für alle Lagen des Gleitpunktes P eine Gleichgewichtsdistanz ist und umgekehrt.*

§ 17. Gleichgewichtsdistanzen und kürzeste Entfernungen über die Focalhyperbel.

Auf Grund der in § 16 entwickelten allgemeinen Sätze über Gleichgewichtsdistanzen sollen nunmehr die Gleichgewichtsdistanzen zweier Punkte, von denen wenigstens der eine ein Focalpunkt ist, über den mit ihm ungleichnamigen Focalkegelschnitt untersucht werden*), zuerst über die Focalhyperbel.

Es sei ein beliebiger Punkt P und ein Punkt C^0 der Focalellipse gegeben und sei die gebrochene Entfernung PBC^0 mit dem Gleitpunkte B eine Gleichgewichtsdistanz der Punkte P und C^0 über die Focalhyperbel b. Da dann der Halbstrahl BC^0 dem Rotationskegel Bc angehört, der vom Punkte B über der Focalellipse c errichtet ist (vgl. § 11, IV), so gilt dasselbe nach § 16, I auch von dem Halbstrahle BP und muss die unbegrenzte *Gerade* BP die Focalellipse schneiden, also *eine Focallinie des Punktes P sein.*

---

*) Die in Anm. IV, 6 geforderten Voraussetzungen sind, bei Benutzung etwa der folgenden Parameterdarstellung der Focalellipse und Focalhyperbel:

$$x = \sqrt{\alpha - \gamma} \cdot \cos t, \quad y = \sqrt{\beta - \gamma} \cdot \sin t, \quad z = 0$$

$$x = \sqrt{\alpha - \beta} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = 0, \quad z = \sqrt{\beta - \gamma} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

für alle Punkte P der Focalellipse und alle endlichen Punkte der Focalhyperbel erfüllt.

Ist daher *der Punkt P kein Focalpunkt*, sodass er vier getrennte oder nicht getrennte Focallinien f_i hat (vgl. § 12, II, III), so ist B einer der vier Punkte B_i (vgl. § 15), in denen diese die Focalhyperbel b treffen. Es können also keine anderen als die vier gebrochenen Entfernungen PB_iC^0 der Punkte P und C^0 über die Focalhyperbel b Gleichgewichtsdistanzen sein.

Damit sie es wirklich sind, ist nach § 16, I erforderlich, dass die Halbstrahlen B_iP und B_iC^0 verschiedenen Mänteln des Rotationskegels B_ic angehören, also, da der letztere die Focalellipse in C^0 trifft, der erstere, von B_i über P bis in's Unendliche verfolgt, der Focalellipse nicht begegnet. Dass diese Bedingung für B_1P und B_2P erfüllt, für B_3P und B_4P nicht erfüllt ist, zeigen die in der Richtung von B_i nach P gelesenen Formeln (44) unmittelbar. Zudem liegt nach § 15, III B_1 auf dem mit P ungleichseitigen Zweig der Focalhyperbel, B_2 auf dem mit P gleichseitigen. Es folgt daher:

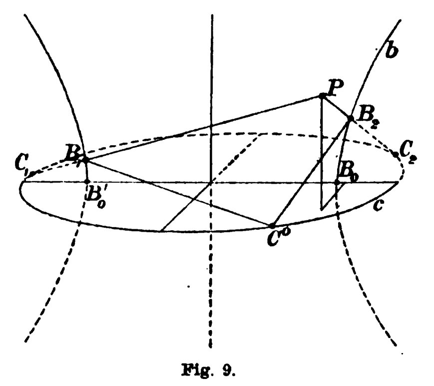


Fig. 9.

I. *Zwischen einem beliebigen Punkte P, der kein Focalpunkt ist, und einem Punkte C^0 der Focalellipse c giebt es zwei Gleichgewichtsdistanzen über die Focalhyperbel b, und zwar eine, PB_1C^0, über ihren mit P ungleichseitigen und eine, PB_2C^0, über ihren mit P gleichseitigen Zweig* (vgl. Fig. 9).

II. *Die Gleitpunkte B_1 und B_2 sind die Schnittpunkte derjenigen der vier Focalhalbstrahlen* $+f_i$ (vgl. Fig. 6), *welche zuerst die Focalhyperbel schneiden* (vgl. 15, II) *mit dieser.*

Die gebrochene Entfernung PBC^0 der Punkte P und C^0 über einen *bestimmten Zweig* der Focalhyperbel ist nach § 17, I nur für eine einzige Lage des Gleitpunktes B eine Gleichgewichtsdistanz und kann nach § 16, III nur für diese ein Maximum oder Minimum ihrer Länge haben. Ein Minimum aber muss sie in der That besitzen; denn während sie unbegrenzt gross wird, wenn der Gleitpunkt B sich auf dem Hyperbelzweige hinreichend weit entfernt, kann sie niemals verschwinden, da B und C^0 als ungleichnamige Focalpunkte stets getrennte Punkte sind. Die einzige vorhandene Gleichgewichtsdistanz ist demnach die kürzeste gebrochene Entfernung der Punkte P und C^0 über den Hyperbelzweig:

III. *Zwischen einem beliebigen Punkte P, der kein Focalpunkt ist, und einem Focalellipsenpunkte C^0 giebt es stets eine und nur eine kürzeste*

Entfernung über einen gegebenen Zweig der Focalhyperbel, nämlich die gebrochene Entfernung PB_1C^0 (vgl. Fig. 9) *über den mit P ungleichseitigen und* PB_2C^0 *über den mit P gleichseitigen Zweig.*

Es erübrigt, diese Sätze auf den bisher noch ausgeschlossenen Fall auszudehnen, dass *P selbst ein Focalpunkt* ist. Hierauf führt von selbst die Betrachtung der besonderen Formen der bereits behandelten Gleichgewichtsdistanzen für einen Punkt P einer Hauptebene:

Beim Durchgang des Punktes P durch die yz-Ebene vertauscht sich die Bezeichnung der Gleitpunkte B_1 und B_2 (vgl. § 15, zu 44, α).

Kommt der Punkt P in die Ebene der Focalellipse zu liegen, so fallen die Punkte B_1 und B_2 in die Scheitelpunkte B_0' und B_0 (vgl. § 15, V) der Focalhyperbel (vgl. Fig. 6, $\lambda = \gamma$ und Fig. 6, $\mu = \gamma$), während zugleich die Rotationskegel B_1c und B_2c die zweite Grenzform von § 16, II annehmen. Die beiden so sich ergebenden Gleichgewichtsdistanzen $PB_0'C^0$ und PB_0C^0 (vgl. Fig. 9, γ) kommen aber nicht nur jedem Punkte der Ebene innerhalb oder ausserhalb der Focalellipse, sondern auch einem Punkte $P = C$ dieser selbst zu. Seinen unendlich vielen Focallinien CB (vgl. § 12, IV) entsprechen zwar dann unendlich viele gebrochene Entfernungen CBC^0 der Punkte C und C^0 über die Focalhyperbel, aber deren Halbstrahlen BC und BC^0 gehören demselben Mantel des Rotationskegels Bc an, da sie beide die Focalellipse c treffen. Es liegen daher keine Gleichgewichtsdistanzen vor, es sei denn, dass mit $B = B_0$ oder B_0' beide Mäntel des Kegels in einer Ebene (vgl. § 16, II) sich vereinigen.

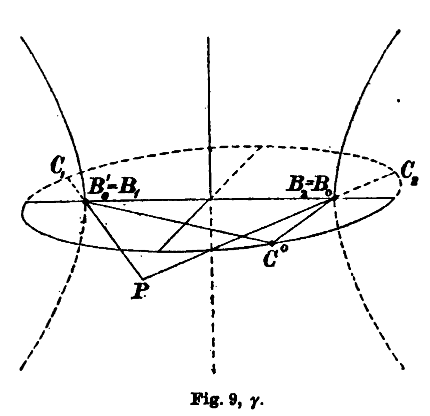


Fig. 9, γ.

Daher *gelten die Sätze* I *und* III *auch für einen Punkt P der Focalellipse c*, indem an Stelle von Satz II die Erklärung tritt:

II, γ, γ. *Die Gleitpunkte* B_1 *und* B_2 *sind bezüglich die Brennpunkte* B_0' *und* B_0 (vgl. § 15, V) *der Focalellipse.*

Bei einem Punkte P in der Ebene der Focalhyperbel haben die kürzesten Entfernungen unter III verschiedene Form, jenachdem er im Gebiete $\mu = \beta$ oder $\nu = \beta$ liegt. Im ersten Falle treffen (vgl. Fig. 6, $\mu = \beta$) die Anfangsstücke PB_1 und PB_2 der beiden Gleichgewichtsdistanzen PB_1C^0 und PB_2C^0, in ihren geradlinigen Fortsetzungen über B_1 und B_2 hinaus, auf die beiden Scheitelpunkte C_0' und C_0 (vgl. § 15, V) der Focalellipse, im letzteren Falle (vgl. Fig. 6, $\nu = \beta$) aber

beide auf denselben Punkt C_0', sodass sie das Stück PB_2 gemein haben. Beide Fälle (vgl. Fig. 9, $\mu = \beta$; $\nu = \beta$) gehen in einander über, indem P mit B_2 zusammenfällt. In der That giebt es, wenn P in irgend einen Punkt B_2 der Focalhyperbel zu liegen kommt, wiederum nur zwei Gleichgewichtsdistanzen der Punkte B_2 und C^0 über die Focalhyperbel, falls die geradlinige Entfernung $B_2 C^0$ als eine Gleichgewichtsdistanz $B_2 B_2 C^0$ mitgezählt wird, deren Gleitpunkt mit dem einen Endpunkt zusammenfällt. Soll es nämlich noch eine andere Gleichgewichtsdistanz $B_2 B_1 C^0$ mit einem von B_2 verschiedenen Gleitpunkt B_1 geben, so muss die Gerade $B_2 B_1$ einerseits zu den unendlich vielen Focallinien des Punktes $P = B_2$ gehören (vgl. § 17, Anfang), andererseits aber, da sie mit der Focalhyperbel zwei Punkte gemein hat, in deren Ebene liegen. Sie ist daher eine der beiden Geraden $B_2 C_0'$ und $B_2 C_0$. Nun schneidet $B_2 C_0'$ (vgl. § 15, V) den mit B_2 ungleichseitigen Zweig der Focalhyperbel in einem zwischen B_2 und C_0' gelegenen Punkte B_1 (vgl. Fig. 9, $\nu = \beta$) und ist daher $B_2 B_1 C^0$ eine Gleichgewichtsdistanz. Dagegen begegnet $B_2 C_0$ der Focalhyperbel in einem ausserhalb der Strecke $B_2 C_0$ gelegenen Punkt B_1, sodass $B_2 B_1 C^0$ keine Gleichgewichtsdistanz wird.

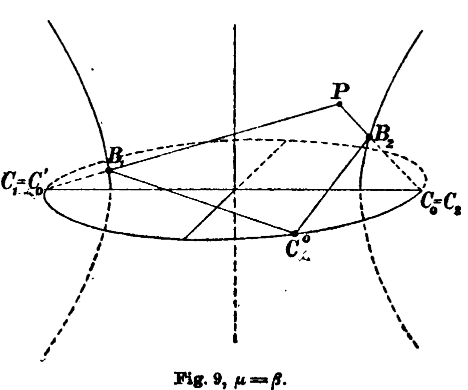


Fig. 9, $\mu = \beta$.

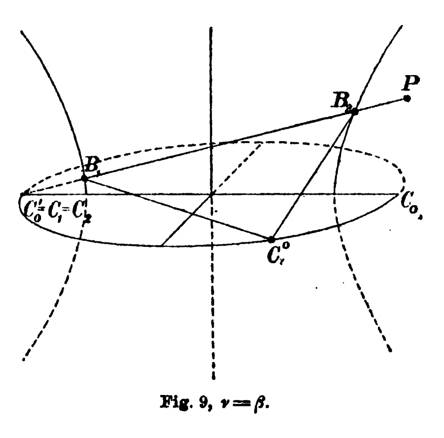


Fig. 9, $\nu = \beta$.

Die Sätze I *und* III *gelten daher auch für einen Punkt P der Focalhyperbel b*, indem an Stelle von II die Erklärung tritt:

II, β, β. *Der Gleitpunkt B_2 fällt mit P zusammen und B_1 ist der zweite Schnittpunkt (neben P selbst) des von P nach C_0'* (vgl. § 15, V) *laufenden Halbstrahles mit der Focalhyperbel.*

Bei der Grenzform Fig. 1′ der Focalkegelschnitte fallen nach § 15 (vgl. Fig. 6′) die beiden Punkte B_1 und B_2 auf der Focalaxe b zusammen. Die beiden Halbstrahlen $B_1 P$ und $B_1 C^0$ (vgl.

Fig. 9′) gehören verschiedenen Mänteln des Rotationskegels $B_1 c$ an und folgt:

I′. *Zwischen einem beliebigen Punkte P und einem Punkte C^0 des Focalkreises c giebt es eine Gleichgewichtsdistanz PB_1C^0 über die Focalaxe b.*

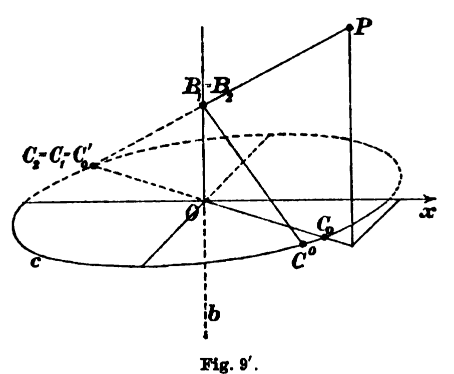


Fig. 9′.

II′. *Der Gleitpunkt B_1 ist der Schnittpunkt desjenigen der beiden Focalhalbstrahlen $+f_1$ und $+f_3$* (vgl. Fig. 6′), *der zuerst die Focalaxe schneidet, mit dieser.*

Er fällt nach O, wenn P in der Ebene des Focalkreises, und nach P selbst, wenn P in der Focalaxe liegt.

III′. *Die Gleichgewichtsdistanz PB_1C^0 ist die kürzeste Entfernung der Punkte P und C^0 über die Focalaxe.*

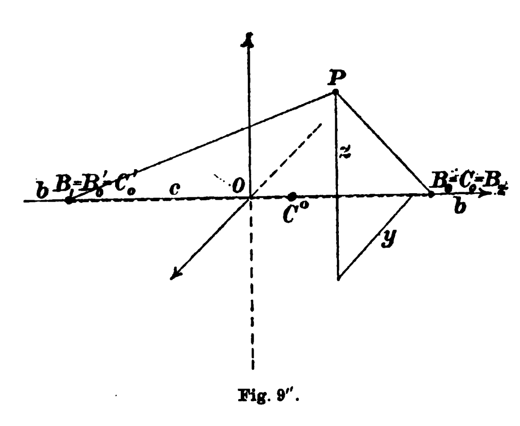


Fig. 9″.

Bei der Grenzform Fig. 1″ der Focalkegelschnitte fallen nach § 15 (vgl. Fig. 6″) die beiden Punkte B_1 und B_2 in die beiden Hauptbrennpunkte B_0' und B_0 (vgl. § 15, V). Wenn daher Satz I die Form erhält (vgl. Fig. 9″):

I″. *Zwischen einem beliebigen Punkte P und einem Punkte C^0 des inneren Focalaxenstückes c giebt es zwei Gleichgewichtsdistanzen $PB_0'C^0$ und PB_0C^0 über das ungleichseitige und gleichseitige äussere Focalaxenstück b,*

so liegen hier nur noch Grenzformen der Gleichgewichtsdistanzen vor, da die Gleitpunkte singuläre Punkte der Curve b, Punkte ohne bestimmte Tangente, sind.

II′. *Die Gleitpunkte B_0' und B_0 sind von P unabhängig.*

III′. *Die Gleichgewichtsdistanzen $PB_0'C^0$ und PB_0C^0 sind die kürzesten Entfernungen der Punkte P und C^0 über das ungleichseitige und das gleichseitige äussere Focalaxenstück.*

Bei der Grenzform Fig. 1‴ der Focalkegelschnitte, wo die Focalellipse c nur einen Punkt O aufweist, gehen die betrachteten Gleichgewichtsdistanzen in den Radius PO über.

§ 18. Gleichgewichtsdistanzen und kürzeste und weiteste Entfernungen über die Focalellipse.

Es sei ein beliebiger Punkt P und ein Punkt B^0 der Focalhyperbel gegeben und sei die gebrochene Entfernung PCB^0 mit dem Gleitpunkte C eine Gleichgewichtsdistanz der Punkte P und B^0 über die Focalellipse. Da dann der Halbstrahl CB^0 dem Rotationskegel Cb angehört, der von C über der Focalhyperbel b errichtet ist (vgl. § 11, IV), gilt dasselbe nach § 16, I auch von dem Halbstrahl CP und *muss die Gerade* CP die Focalhyperbel schneiden, also *eine Focallinie des Punktes* P *sein.*

Ist daher *der Punkt* P *kein Focalpunkt,* sodass er vier getrennte oder nicht getrennte Focallinien f_i hat, so ist C einer der vier Punkte C_i, in denen diese die Focalellipse c treffen. Es können also keine anderen als die vier gebrochenen Entfernungen PC_iB^0 der Punkte P und B^0 über die Focalellipse c Gleichgewichtsdistanzen sein. Damit sie es wirklich sind, ist nach § 16, I erforderlich, dass die Halbstrahlen C_iP und C_iB^0 verschiedenen Mänteln des Rotationskegels C_ib angehören. Hierbei kommt es darauf an, *ob der Punkt* B^0 *mit* P *gleichseitig oder ungleichseitig ist; im letzteren Falle mag er zur Unterscheidung mit* $B^{0\prime}$ *bezeichnet werden,* wie auch b der mit P gleichseitige und b' der mit P ungleichseitige Zweig der Focalhyperbel sei (vgl. § 15, V).

Bei dieser Bezeichnung trifft der Halbstrahl C_iB^0 den Zweig b, der Halbstrahl $C_iB^{0\prime}$ den Zweig b'. Es muss daher entweder der Halbstrahl C_iP bis in's Unendliche verlängert den Zweig b', bezüglich b, oder der entgegengesetzte Halbstrahl den Zweig b, bezüglich b' treffen. Nun schneidet der Halbstrahl C_1P stets b', da zwischen B_1 und P nach (44) stets A_1 liegt, sodass PC_1B^0, aber nicht $PC_1B^{0\prime}$ eine Gleichgewichtsdistanz ist. Der Halbstrahl C_2P trifft stets b, da nach (44) zwischen B_2 und P niemals A_2 liegt, sodass $PC_2B^{0\prime}$, aber nicht PC_2B^0 eine Gleichgewichtsdistanz ist. Was den Halbstrahl C_3P angeht, so trifft nach (44) entweder dieser b oder der ihm entgegengesetzte b', sodass $PC_3B^{0\prime}$, aber nicht PC_3B^0 eine Gleichgewichtsdistanz ist. Was endlich den Halbstrahl C_4P angeht, so trifft nach (44) entweder dieser b' oder der ihm entgegengesetzte b, sodass PC_4B^0, aber nicht $PC_4B^{0\prime}$ eine Gleichgewichtsdistanz ist. Die Zusammenfassung dieser Schlüsse liefert die folgenden Sätze (vgl. Fig. 10):

I. *Zwischen einem beliebigen Punkte* P, *der kein Focalpunkt ist, und einem mit ihm gleichseitigen Punkte* B^0 *oder ungleichseitigen Punkte* $B^{0\prime}$ *der Focalhyperbel* b *giebt es zwei Gleichgewichtsdistanzen über die Focalellipse, nämlich* PC_1B^0 *und* PC_4B^0 *oder bezüglich* $PC_2B^{0\prime}$ *und* $PC_3B^{0\prime}$.

II. *Die Gleitpunkte C_1 und C_2 sind die Schnittpunkte derjenigen der vier Focalhalbstrahlen $+ f_i$, welche zuerst die Focalhyperbel, C_3 und C_4 die Schnittpunkte derjenigen, welche zuerst die Focalellipse treffen, mit dieser* (vgl. § 15, II).

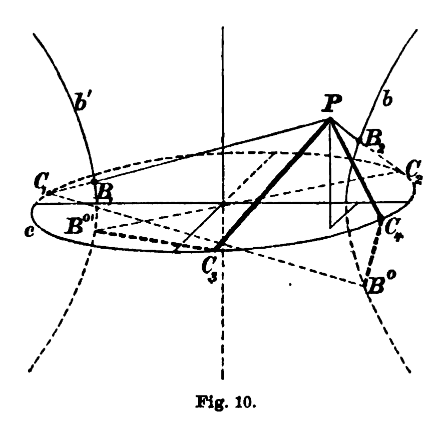


Fig. 10.

Die gebrochene Entfernung $PCB^0(B^{0\prime})$ der Punkte P und $B^0(B^{0\prime})$ über die Focalellipse ist nach I nur für zwei Lagen des Gleitpunktes C eine Gleichgewichtsdistanz und kann nach § 16, III nur für diese ein Maximum oder Minimum ihrer Länge haben. Sie muss aber in der That ein Maximum und ein Minimum besitzen, da für alle Lagen des Gleitpunktes C ihre beiden geradlinigen Stücke PC und $CB^0(B^{0\prime})$ endlich sind und das letztere niemals verschwindet. Die beiden einzigen vorhandenen Gleichgewichtsdistanzen sind demnach die eine die kürzeste, die andere die weiteste Entfernung der Punkte P und $B^0(B^{0\prime})$ über die Focalellipse.

Welche von beiden das Minimum und welche das Maximum ist, ergiebt sich durch die Betrachtung eines der bei der Ableitung der Sätze I und II ausgeschlossenen Fälle, in denen P ein Focalpunkt ist. Sind nämlich $P = B^0$ und $B^{0\prime}$ irgend zwei ungleichseitige Punkte der Focalhyperbel, so ist ihre gebrochene Entfernung $B^0 CB^{0\prime}$ über die Focalellipse für alle Lagen des Gleitpunktes C eine Gleichgewichtsdistanz, da die Halbstrahlen von C nach B^0 und $B^{0\prime}$ stets verschiedenen Mänteln des Rotationskegels Cb angehören. Für den Fall $P = B^0$ verliert also der auf den ungleichseitigen Punkt $B^{0\prime}$ bezügliche Theil der Sätze I und II seine Giltigkeit und treten dafür die folgenden Sätze ein:

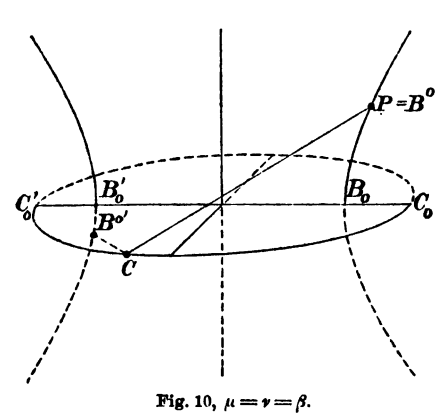


Fig. 10, $\mu = \nu = \beta$.

[I, β, β] *Zwischen zwei ungleichseitigen Punkten $P = B^0$ und $B^{0\prime}$ der Focalhyperbel giebt es unendlich viele Gleichgewichtsdistanzen $B^0 CB^{0\prime}$ über die Focalellipse* (vgl. Fig. 10, $\mu = \nu = \beta$).

[II, β, β] *Der Gleitpunkt C ist ein beliebiger Punkt der letzteren.*

Hieraus folgt aber nach § 16, IV:

[III, β, β] *Alle gebrochenen Entfernungen $B^0 C B^{0\prime}$ zweier ungleichseitiger Punkte der Focalhyperbel über die Focalellipse haben dieselbe Länge.*

Dieser Satz entscheidet nun darüber, welche von den beiden Gleichgewichtsdistanzen in Satz I das Maximum und welche das Minimum ist. Es sind nämlich dort (vgl. Fig. 10) B_1 und B^0, sowie B_2 und $B^{0\prime}$ ungleichseitige Punkte der Focalhyperbel. Indem nun für den Augenblick allgemein mit $P_1 P_2$ die geradlinige absolute Entfernung zweier Punkte P_1 und P_2 bezeichnet wird, folgt aus [III, β, β]:

$$PB_1 + B_1 C_1 + C_1 B^0 = PB_1 + B_1 C_4 + C_4 B^0,$$
$$PB_2 + B_2 C_2 + C_2 B_0' = PB_2 + B_2 C_3 + C_3 B^{0\prime}.$$

Es ist aber in den Dreiecken $PB_1 C_4$ und $PB_2 C_3$ (deren Seiten $B_1 C_4$ und $B_2 C_3$ man in Fig. 10 gezogen denke):

$$PB_1 + B_1 C_4 \geqq PC_4 \qquad PB_2 + B_2 C_3 \geqq PC_3$$

Das Gleichheitszeichen könnte in diesen beiden Formeln nur gelten, wenn erstens die drei Ecken eines Dreiecks in gerader Linie und zweitens, da es sich um absolute Entfernungen handelt, B_1 zwischen P und C_4, bezüglich B_2 zwischen P und C_3 läge. Die erste Bedingung ist nach den Figuren 6 nur erfüllt, wenn P in der xy-Ebene innerhalb der Focalellipse liegt. Dann ist aber die zweite nicht erfüllt. Es gelten also nur die Ungleichheitszeichen und folgt demnach weiter:

$$PB_1 + B_1 C_1 + C_1 B^0 > PC_4 + C_4 B^0$$
$$PB_2 + B_2 C_2 + C_2 B_0' > PC_3 + C_3 B^{0\prime}$$

oder unter Wiederaufnahme der Bezeichnung von Satz I:

$$PC_1 B^0 > PC_4 B^0 \qquad PC_2 B^{0\prime} > PC_3 B^{0\prime}$$

Daher sind $PC_1 B^0$ und $PC_2 B^{0\prime}$ die Maxima, $PC_4 B^0$ und $PC_3 B^{0\prime}$ die Minima der gebrochenen Entfernungen PCB^0 und $PCB^{0\prime}$. Ueber die Minima, welche in Fig. 10 durch stärkere Linien ausgezeichnet sind, können wir nunmehr den Satz aussprechen:

III. *Zwischen einem beliebigen Punkte P, der kein Focalpunkt ist, und einem mit ihm ungleichseitigen Punkte $B^{0\prime}$ oder gleichseitigen Punkte B^0 der Focalhyperbel giebt es stets eine und nur eine kürzeste Entfernung über die Focalellipse, nämlich die gebrochene Entfernung $PC_3 B^{0\prime}$, bezüglich $PC_4 B^0$.*

Es erübrigt die gefundenen Sätze I und III auf den noch nicht vollständig erledigten Fall auszudehnen, dass P *selbst ein Focalpunkt* ist, wobei zugleich einige Bemerkungen über die besonderen Formen

der Gleichgewichtsdistanzen unter I für einen Punkt P einer Hauptebene anzuschliessen sind.

Beim Durchgang des laufenden Punktes P durch die yz-Ebene vertauschen sich die Bezeichnungen B^0 mit $B^{0\prime}$, C_1 mit C_2, C_3 mit C_4 (vgl. § 15, zu 44, α).

Kommt der Punkt P in die Ebene der Focalellipse zu liegen, so werden die Halbstrahlen PC_3 und PC_4 den von P nach B_0 und B_0' laufenden Halbstrahlen PC_2 und PC_1 entgegengesetzt oder mit ihnen in umgekehrter Reihenfolge identisch, jenachdem P im Gebiete $\lambda = \gamma$ oder $\mu = \gamma$ liegt (vgl. Fig. 6, $\lambda = \gamma$ und $\mu = \gamma$ und Fig. 10, $\lambda = \gamma$ und $\mu = \gamma$). Beide Fälle gehen ineinander über, indem P mit C_3

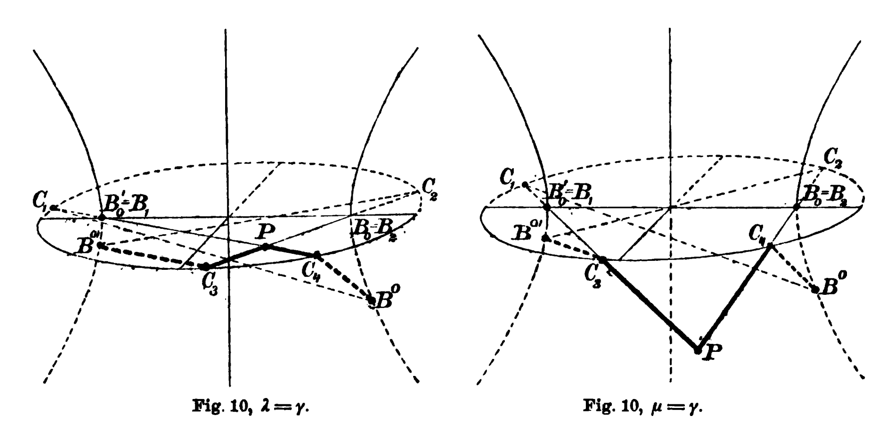


Fig. 10, $\lambda = \gamma$. Fig. 10, $\mu = \gamma$.

und C_4 zusammenfällt. In der That giebt es, wenn P in irgend einen Punkt $C(C_3, C_4)$ der Focalellipse zu liegen kommt, wiederum nur zwei Gleichgewichtsdistanzen der Punkte C und $B^0(B^{0\prime})$ über die Focalellipse, falls die geradlinige Entfernung $CB^0(CB^{0\prime})$ mitgezählt wird. Soll es nämlich noch eine andere Gleichgewichtsdistanz $CC'B^0(CC'B^{0\prime})$ mit einem von C verschiedenen Gleitpunkte C' geben, so muss die Gerade CC' einerseits zu den unendlich vielen Focallinien des Punktes C gehören (vgl. § 18, Anfang); andererseits, da sie die Focalellipse in zwei Punkten C und C' schneidet, in deren Ebene liegen. Sie ist daher eine der beiden Geraden CB_0' und CB_0, deren zweite Schnittpunkte (neben C selbst) mit der Focalellipse bezüglich C_1 und C_2 heissen mögen. Dann sind aber CC_1B^0 und $CC_2B^{0\prime}$ Gleichgewichtsdistanzen, da die Halbstrahlen $C_1B_0'C$ und C_1B^0, sowie C_2B_0C und $CB^{0\prime}$ (vgl. § 15, V) verschiedene Zweige der Focalhyperbel treffen, dagegen sind es $CC_1B^{0\prime}$ und CC_2B^0 nicht. Hieraus folgt aber, dass die Sätze I und III auch für einen Punkt P der Focalellipse gelten, indem an Stelle von II die Bemerkung tritt:

II, γ, γ. *Die Gleitpunkte C_3 und C_4 fallen mit P zusammen, C_1 und C_2 aber sind die zweiten Schnittpunkte (neben C_3 und C_4) der von P nach B_0' und B_0* (vgl. § 15, V) *gezogenen Halbstrahlen mit der Focalellipse.*

Kommt der Punkt P in die Ebene der Focalhyperbel zu liegen, so laufen die Anfangsstücke PC_4 und PC_3 der kürzesten Entfernungen des Punktes P von den Punkten B^0 und $B^{0\prime}$ bezüglich nach den beiden Punkten C_0 und C_0' oder beide nach C_0, jenachdem P im Gebiete $\mu = \beta$ oder $\nu = \beta$ liegt (vgl. Fig. 6, $\mu = \beta$; $\nu = \beta$ und Fig. 10, $\mu = \beta$; $\nu = \beta$). Tritt P in einen Punkt $B(B_2)$ der Focalhyperbel ein, der mit B^0 gleichseitig liegt, so *werden die kürzeste und weiteste Entfernung $PC_3B^{0\prime}$ und $PC_2B^{0\prime}$ von dem ungleichseitigen Punkte $B^{0\prime}$* nach [III, β, β] *einander gleich* und auch jeder anderen gebrochenen Entfernung $PCB^{0\prime}$ der Punkte P und $B^{0\prime}$ über die Focalellipse gleich. Was dagegen die gebrochenen Entfernungen PCB^0 der gleichseitigen Punkte P und B^0 über die Focalellipse angeht, so sind diese, da die Halbstrahlen CP und CB^0 demselben Mantel des Rotationskegels Cb angehören, keine Gleichgewichtsdistanzen, es sei denn, dass mit $C = C_0$ oder C_0' beide Mäntel des Kegels in einer Ebene sich vereinigen (vgl. § 16, II). Es ist aber PC_0B^0 die kürzeste und $PC_0'B^0$ die weiteste Entfernung, da PC_0' zwischen P und C_0' den mit P ungleichseitigen Zweig der Focalhyperbel trifft und daher, wie oben bei Ableitung von Satz III, geschlossen werden kann, dass $PC_0'B^0 > PC_0B^0$ ist. *Die Sätze* I *und* III *gelten daher für einen Punkt P der Focalhyperbel nur, insoweit sie sich auf einen gleichseitigen Punkt B^0 beziehen,* mit der an Stelle von II tretenden Erklärung:

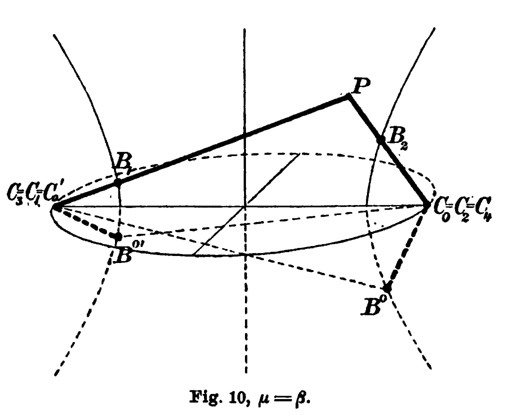


Fig. 10, $\mu = \beta$.

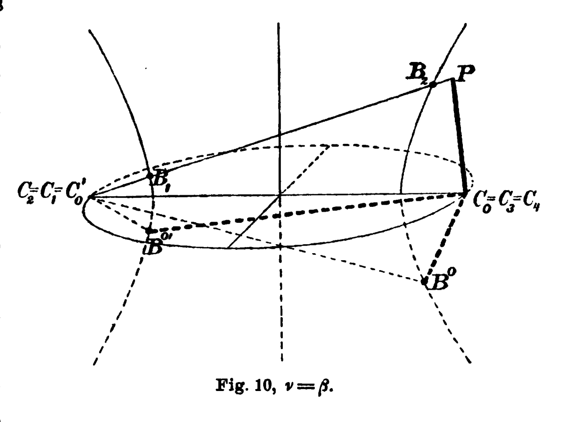


Fig. 10, $\nu = \beta$.

II, β, β. *Die Gleitpunkte C_1 und C_4 sind bezüglich die Brennpunkte C_0' und C_0* (vgl. § 15, V) *der Focalhyperbel.*

Soweit dagegen die Sätze I und III sich auf den ungleichseitigen Punkt $B^{0\prime}$ beziehen, verlieren sie ihre Geltung für einen Punkt P der Focalhyperbel und sind durch die mit [I, β, β] und [III, β, β] bezeichneten Sätze zu ersetzen.

Fig. 10'.

Für die erste Grenzform Fig. 1' der Focalkegelschnitte hört die Unterscheidung von B^0 und $B^{0\prime}$ auf, und vereinigen sich die beiden weitesten Entfernungen PC_1B^0 und $PC_2B^{0\prime}$ des allgemeinen Falles zu $PC_0'B^0$ (vgl. Fig. 6' und Fig. 10') und die beiden kürzesten PC_4B^0 und $PC_3B^{0\prime}$ zu PC_0B^0:

I'. *Zwischen einem beliebigen Punkte P, der ausserhalb der Focalaxe b liegt, und einem Punkte B^0 dieser giebt es zwei Gleichgewichtsdistanzen PC_0B^0 und $PC_0'B^0$ über den Focalkreis c.*

II'. *C_0 und C_0' sind die Schnittpunkte der Meridianebene des Punktes P mit dem Focalkreise, C_0 der in Bezug auf die Focalaxe b diesseitige, C_0' der jenseitige.*

III'. *PC_0B^0 ist die kürzeste Entfernung der Punkte P und B^0 über den Focalkreis.*

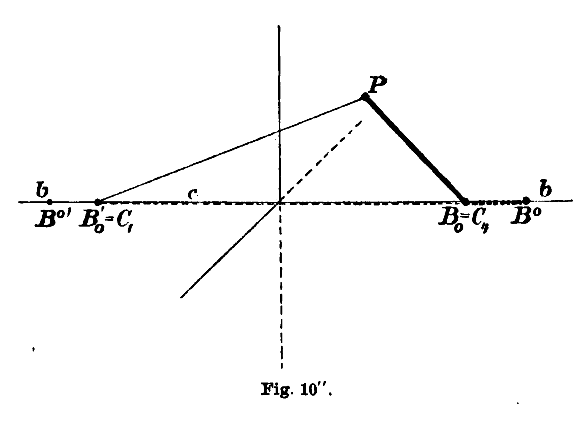


Fig. 10''.

Eine Ausnahme bilden die Punkte P der Focalaxe:

[I—III]. *Zwischen zwei Punkten P und B^0 der Focalaxe b giebt es unendlich viele Gleichgewichtsdistanzen PCB^0 mit beliebigem Gleitpunkte C und alle von gleicher Länge.*

Für die zweite Grenzform Fig. 1'' der Focalkegelschnitte ergiebt sich ohne Weiteres (vgl. Fig. 10''):

I''. *Zwischen einem beliebigen Punkte P und einem gleichseitigen Punkte B^0 oder ungleichseitigen Punkte $B^{0\prime}$ der äusseren Focalaxenstücke b*

giebt es zwei Gleichgewichtsdistanzen (vgl. § 17, zu I″) *über das innere Focalaxenstück,* PB_0B^0 *und* $PB_0'B^0$*, bezüglich* $PB_0'B^{0\prime}$ *und* $PB_0B^{0\prime}$.

II″. *Die Gleitpunkte sind von* P *unabhängig und fallen in die Hauptbrennpunkte.*

III″. *Die beiden gebrochenen Entfernungen* PB_0B^0 *und* $PB_0'B^{0\prime}$ *sind kürzeste Entfernungen über das innere Focalaxenstück.*

Für einen Punkt P auf einem äusseren, etwa dem rechten Focalaxenstück b fallen kürzeste, $PB_0'B^{0\prime}$, und weiteste Entfernung, $PB_0B^{0\prime}$, von einem mit P ungleichseitigen Punkte $B^{0\prime}$ in die directe Entfernung $PB^{0\prime}$ zusammen.

§ 19. **Einführung der gebrochenen Focaldistanzen.**

Wir bezeichnen in den folgenden §§ 19—21 (anders als in § 15, V) alle Punkte auf der einen Seite der yz-Ebene, etwa der Seite der positiven x-Axe (der rechten Seite), ohne Accent, alle auf der anderen (linken) Seite mit Accent, sodass der laufende Punkt des Raumes seine Bezeichnung P in P' ändert, wenn er von jener auf diese Seite übergeht. Entsprechend unterscheiden wir mit den Bezeichnungen b und b' die beiden Zweige der Focalhyperbel.

Dies festgesetzt, *seien zwei ungleichseitige Punkte* B^0 *und* $B^{0\prime}$ *der Focalhyperbel gegeben, ferner zwei Punkte* C^0 *und* $C^{0\prime}$ *der Focalellipse gegeben und diesen je einer der beiden Zweige* b *und* b' *der Focalhyperbel zugeordnet.* Wenn wir der Einfachheit wegen annehmen und in der Bezeichnung C^0, $C^{0\prime}$ ausdrücken, dass jeder der beiden letzteingeführten Punkte mit dem zugeordneten Zweige gleichseitig liegt, so ist dies eine unwesentliche Einschränkung.

Die kürzesten Entfernungen des laufenden Raumpunktes $P(P')$ von den festen Punkten B^0 und $B^{0\prime}$ der Focalhyperbelzweige b und b' über die Focalellipse c sollen ihrer Gestalt und Länge nach mit r und r', die kürzesten Entfernungen von den beiden festen Punkten C^0 und $C^{0\prime}$ der Focalellipse c über den je zugeordneten Focalhyperbelzweig b und b' sollen ebenso mit s und s' benannt werden.

Diese vier kürzesten Entfernungen r, r', s, s' *nennen wir die vier gebrochenen Focaldistanzen des Punktes* $P(P')$ *von den vier festen Focalpunkten* B^0, $B^{0\prime}$, C^0, $C^{0\prime}$; r und r' oder s und s' nennen wir zwei *gleichnamige,* r und s oder r' und s' zwei *gleichseitige* gebrochene Focaldistanzen.

Nach § 17, III und § 18, III können wir die Form der vier gebrochenen Focaldistanzen sofort angeben. Nur werden wir jetzt den in § 15, 44 eingeführten Punkten B_i, C_i einen Accent anfügen, wenn sie links von der yz-Ebene liegen, also in (44) von einem Punkte P

durch einen Punkt A_i getrennt oder von einem Punkte P' nicht durch einen Punkt A_i getrennt sind. Danach stellen sich r, r', s, s' für die beiden Lagen P und P' des laufenden Punktes folgendermaassen dar (vgl. Fig. 11):

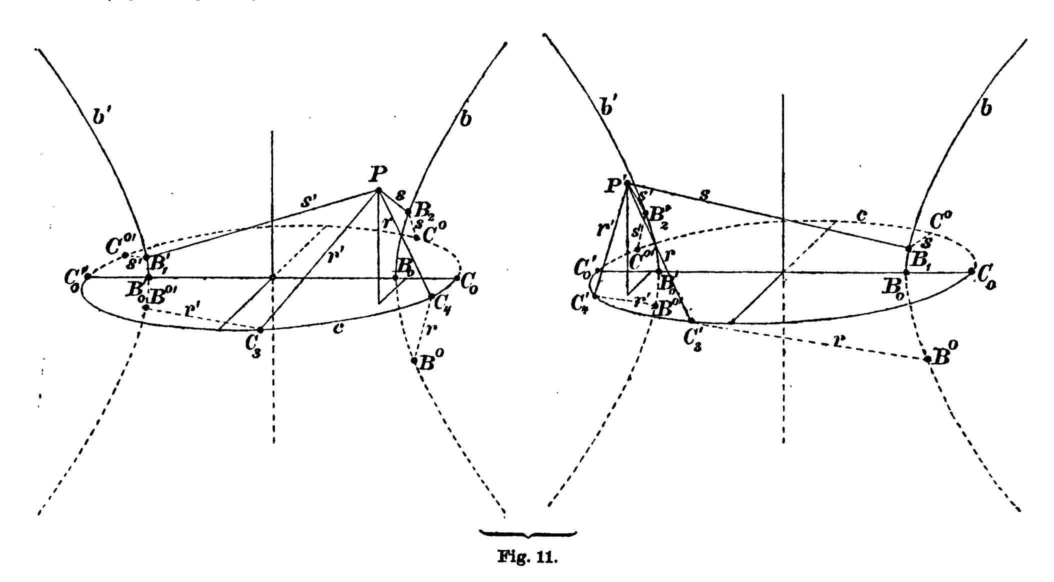


Fig. 11.

$$(45)\qquad \left\{\begin{array}{ll} r = PC_4B^0 & r = P'C_3(C_3')B^0 \\ r' = PC_3'(C_3)B^{0\prime} & r' = P'C_4'B^{0\prime} \\ s = PB_2C^0 & s = P'B_1C^0 \\ s' = PB_1'C^{0\prime} & s' = P'B_2'C^{0\prime}, \end{array}\right.$$

wo neben der einen der beiden Möglichkeiten für C_3, C_3' (vgl. § 15, IV) die andere in Klammern beigefügt ist.

Da die Bezeichnung r, r', s, s' der vier gebrochenen Focaldistanzen nach Maassgabe der vier festen Focalpunkte gewählt ist, ändert sie sich beim Durchgang des laufenden Punktes durch die yz-Ebene nicht (vgl. Fig. 11).

Aus der Vergleichung der Formeln (45) und (44) geht ferner hervor:

I. *Die Anfangsstücke der vier gebrochenen Focaldistanzen eines Punktes, d. h. die Stücke von ihm bis zum Gleitpunkte, fallen in seine vier positiven Focalhalbstrahlen* $+f_i$ *hinein,* wenn der Punkt kein Focalpunkt ist.

II. *Die Endstücke, d. h. die Stücke vom Gleitpunkte bis zum Ende, verbinden stets zwei ungleichnamige Focalpunkte.*

Da die vier Focalhalbstrahlen $+f_i$, wenn $P(P')$ in die Ebene eines Focalkegelschnittes zu liegen kommt, ebenfalls in diese hineinfallen, so gilt dasselbe auch von den Anfangsstücken der gebrochenen

Focaldistanzen, während es für die Endstücke nicht nothwendig ist. Die auf diese Fälle bezüglichen Figuren 11, $\lambda = \gamma$, $\mu = \gamma$, $\mu = \beta$, $\nu = \beta$ gehen (unter Beschränkung auf die Lage P) aus der Zusammensetzung der gleich bezeichneten Figuren 9 und 10 hervor.

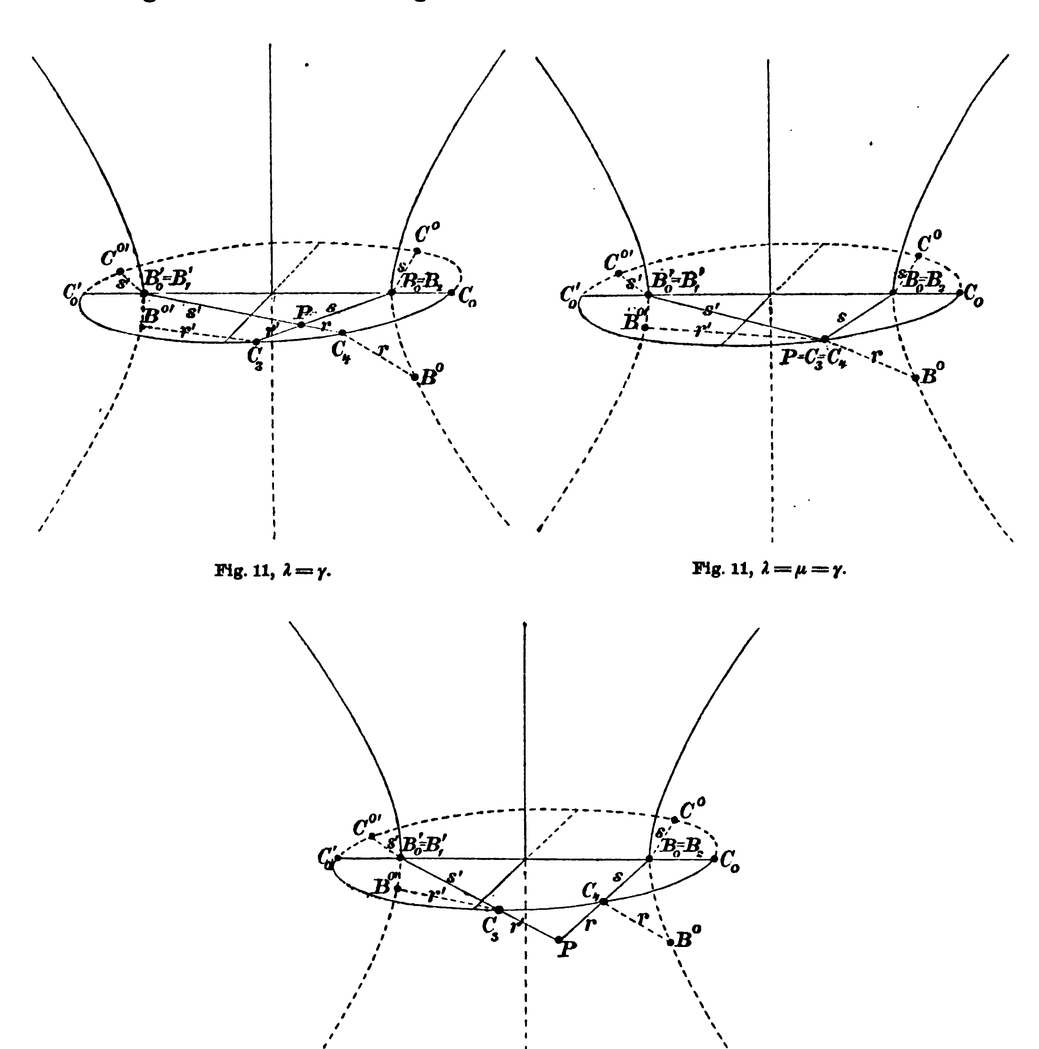


Fig. 11, $\lambda = \gamma$.

Fig. 11, $\lambda = \mu = \gamma$.

Fig. 11, $\mu = \gamma$.

Wenn P ein Focalpunkt ist, liegen die Anfangsstücke von r, r', s, s', sofern sie nicht verschwinden, auf dem von P über dem ungleichnamigen Focalkegelschnitt errichteten Rotationskegel. Ein Punkt P

der Focalellipse (vgl. Fig. 11, $\lambda = \mu = \gamma$) hat (vgl. § 17, II, γ, γ und § 18, II, γ, γ) vier bestimmte gebrochene Focaldistanzen, von denen r und r' bei verschwindenden Anfangsstücken ungebrochen erscheinen.

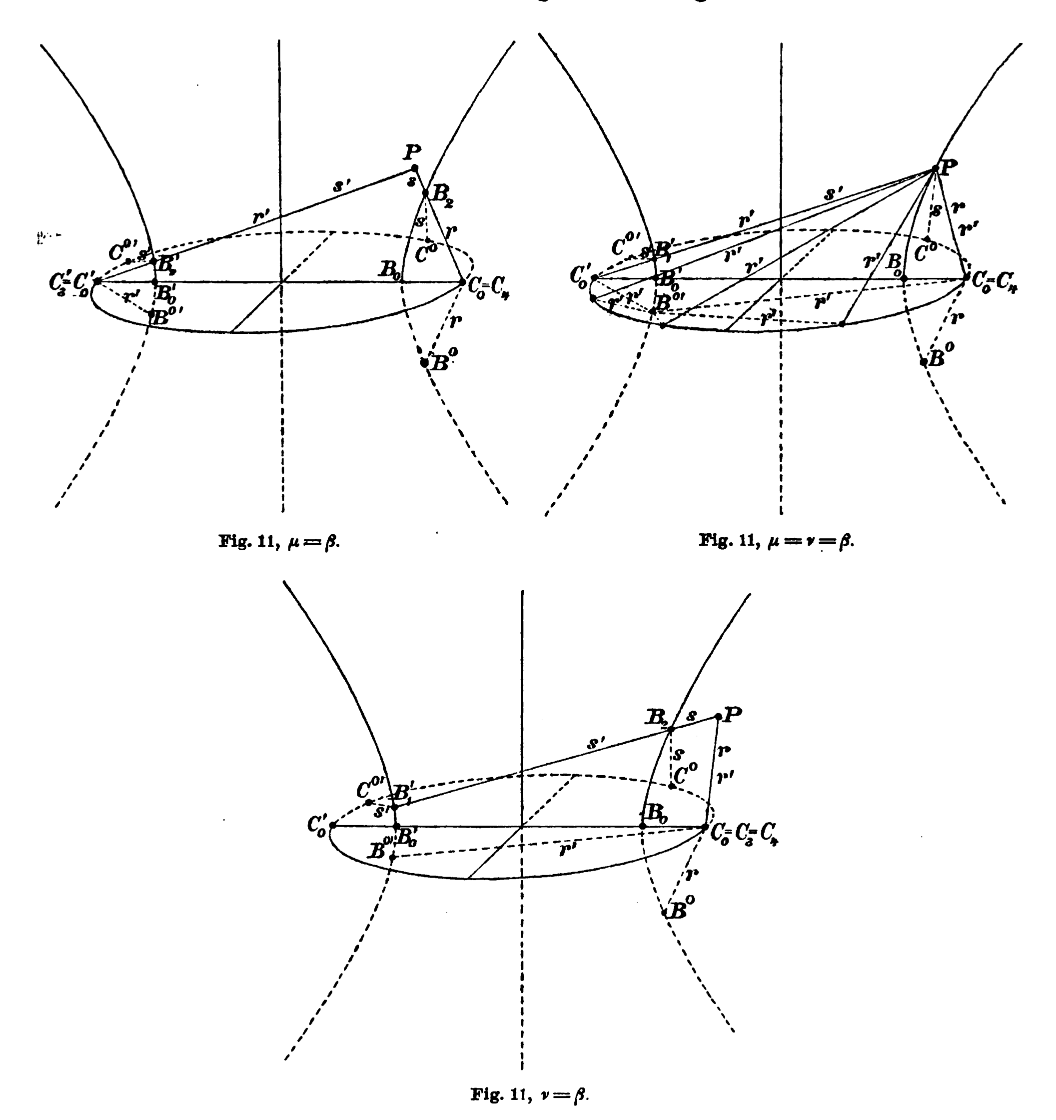


Fig. 11, $\mu = \beta$.

Fig. 11, $\mu = \nu = \beta$.

Fig. 11, $\nu = \beta$.

Fällt P in C^0, so fallen Anfangs- und Endstück von $s = PB_0C^0$, entgegengesetzt gerichtet, ineinander. Ein Punkt P auf dem rechten Zweige b der Focalhyperbel (vgl. Fig. 11, $\mu = \nu = \beta$) hat (vgl. § 17, II, β, β und § 18, II, β, β) neben drei bestimmten gebrochenen Focaldistanzen r, s, s', von denen s ungebrochen ist, eine vierte gebrochene

Focaldistanz r' (vgl. § 18, [II, β, β]), welche unendlich vieldeutig ist (in Fig. 11, $\mu = \nu = \beta$ sind fünf Formen dargestellt, von denen zwei in der Ebene der Focalhyperbel liegen). *Durch diese Vieldeutigkeit wird der Sprung vermittelt, den die Form von r' beim Übergang von* Fig. 11, $\mu = \beta$ *auf* Fig. 11, $\nu = \beta$ *macht*, wenn P, in der xz-Ebene verbleibend, die Focalhyperbel überschreitet. Fällt P in B^0, so fallen Anfangs- und Endstück von $r = PC_0B^0$, entgegengesetzt gerichtet, ineinander. Für einen Punkt P' auf b' ist r unbestimmt und s' ungebrochen.

III. *Jeder Punkt des Raumes hat vier bestimmte gebrochene Focaldistanzen, ausser wenn er auf der Focalhyperbel liegt. In diesem Falle wird eine der vier gebrochenen Focaldistanzen, diejenige von dem ungleichseitigen Punkte $B^{0\prime}$ oder B^0 (r' oder r) unendlich vieldeutig.*

Indessen hat sie nach § 18, [III, β, β] in allen ihren Formen *dieselbe Länge.*

Die gebrochenen Focaldistanzen beziehen sich auf die vier willkürlich gegebenen Focalpunkte B^0, $B^{0\prime}$, C^0, $C^{0\prime}$, von denen nur B^0, $B^{0\prime}$ mit C^0, $C^{0\prime}$ ungleichnamig und B^0 mit $B^{0\prime}$ ungleichseitig sein sollen; den Punkten C^0 und $C^{0\prime}$ sind die Zweige b und b' der Focalhyperbel zugeordnet. Diesen Bedingungen wird durch eine ausgezeichnete Lage der vier Punkte entsprochen, indem sie in die vier *Hauptbrennpunkte* B_0, B_0', C_0, C_0' verlegt werden und den Punkten C_0 und C_0' je der gleichseitige Hyperbelzweig zugeordnet wird. Die entsprechenden gebrochenen Focaldistanzen sollen *die gebrochenen Hauptfocaldistanzen* genannt und mit r_0, r_0', s_0, s_0' bezeichnet werden.

IV. *Es sind also r_0 und r_0' die kürzesten Entfernungen des laufenden Punktes von den beiden inneren Hauptbrennpunkten B_0 und B_0' über die Focalellipse, s_0 und s_0' von den beiden äusseren Hauptbrennpunkten C_0 und C_0' über den mit ihnen je gleichseitigen Zweig der Focalhyperbel.*

In den Figuren 11 gehen r, r', s, s' in r_0, r_0', s_0, s_0' über, wenn wir die Punkte B^0, $B^{0\prime}$, C^0, $C^{0\prime}$ je auf ihrem Focalkegelschnitt nach B_0, B_0', C_0, C_0' rücken lassen. *Die Anfangsstücke der gebrochenen Focaldistanzen bleiben von dieser Aenderung unberührt;* es bewegen sich nur die Endstücke auf dem einen Mantel der vom Gleitpunkte über dem ungleichnamigen Focalkegelschnitt errichteten Rotationskegel.

Lassen wir die beiden Focalkegelschnitte b und c in die *erste specielle Form* (vgl. Fig. 1′) übergehen, so *kommen* nach § 17 und § 18 (vgl. Fig. 11′, welche als Specialfall von Fig. 11, $\nu = \beta$ aufgefasst werden kann) *die Anfangsstücke der gleichnamigen gebrochenen Focaldistanzen r und r', s und s' zum Zusammenfall* und sind, da die Unterscheidung der beiden Hyperbelzweige aufhört, r und r', sowie s und s' trotz der auseinandertretenden Endstücke überhaupt nicht mehr als

wesentlich verschieden zu betrachten. Um daher den vorliegenden Fall selbständig zu behandeln, denken wir uns einen Punkt B^0 der Focalaxe b und einen Punkt C^0 des Focalkreises c gegeben und bezeichnen mit r die kürzeste Entfernung des laufenden Punktes P von B^0 über den Focalkreis, mit s die kürzeste Entfernung von C^0 über die Focalaxe.

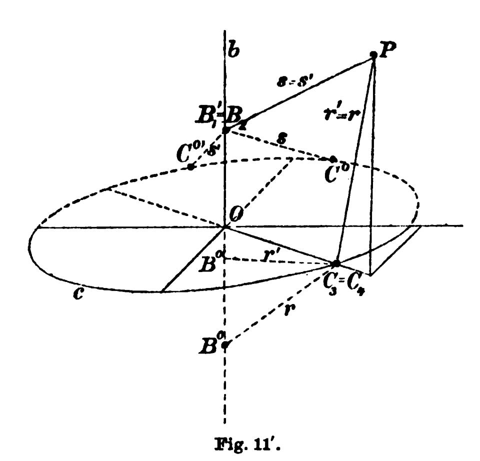


Fig. 11'.

Diese beiden kürzesten Entfernungen r und s nennen wir die beiden gebrochenen Focaldistanzen des Punktes P von den beiden festen Focalpunkten B^0 und C^0.

Jeder Punkt des Raumes hat zwei bestimmte gebrochene Focaldistanzen, ausser wenn er auf der Focalaxe liegt. In diesem Falle wird r, bei bestimmter Länge, der Form nach unendlich vieldeutig.

Der gegebene Punkt B^0 kann eine ausgezeichnete Lage $B_0 = B_0' = O$ annehmen, für C^0 giebt es eine ausgezeichnete Lage auf dem Focalkreise nicht. Dafür ist aber das Endstück $B_1'C^0 = B_2C^0$ der gebrochenen Focaldistanz s für jeden gegebenen Punkt P der Länge nach von C^0 unabhängig. Wir führen daher *die gebrochenen Hauptfocaldistanzen* $r_0 = r_0'$ und $s_0 = s_0'$ mit der Erklärung ein:

IV'. *Es ist r_0 die kürzeste Entfernung des laufenden Punktes vom Mittelpunkte O über den Focalkreis und s_0 von einem beliebigen festen Punkte C^0 des Focalkreises über die Focalaxe.*

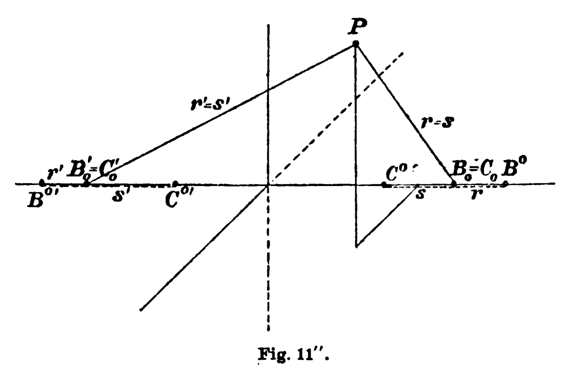


Fig. 11''.

Lassen wir die beiden Focalkegelschnitte b und c in die *zweite specielle Form* (vgl. Fig. 1'') übergehen, so *kommen* nach § 17 und § 18 (vgl. Fig. 11'', welche als Specialfall von Fig. 11, $\mu = \gamma$ oder $\mu = \beta$ gelten kann) *die Anfangsstücke der gleichseitigen gebrochenen Focaldistanzen r und s, r' und s' zum Zusammenfall.* Die gemeinsame ausgezeichnete Lage der Punkte B^0 und C^0 ist der rechte, der Punkte $B^{0\prime}$ und $C^{0\prime}$

der linke Hauptbrennpunkt, sodass die gebrochenen Hauptfocaldistanzen $r_0 = s_0$ und $r_0' = s_0'$ bei verschwindenden Endstücken ungebrochen werden.

IV″. *Es sind r_0 und r_0' die Entfernungen des laufenden Punktes von den beiden Hauptbrennpunkten.*

Bei der *dritten speciellen Form* der Focalkegelschnitte (vgl. Fig. 1‴) fallen die vier gebrochenen Hauptfocaldistanzen $r_0 = r_0' = s_0 = s_0'$ in die Entfernung des laufenden Punktes vom Centrum zusammen.

Nach § 19, I haben die Anfangsstücke der vier gebrochenen Focaldistanzen r, r', s, s' die in § 13, 38 angegebene Anordnung gegen die Axen ξ, η, ζ des Punktes P. Um das Wesentliche dieser Anordnung kurz bezeichnen zu können, verstehen wir unter dem *Winkel zwischen zwei gebrochenen Focaldistanzen* den Winkel zwischen ihren Anfangsstücken, unter dem *Nebenwinkel zwischen zwei gebrochenen Focaldistanzen* aber den Winkel zwischen dem Anfangsstücke des einen und dem Halbstrahl, der dem Anfangsstücke des anderen entgegengesetzt ist. Alsdann folgt aus § 13, 38 ohne Rücksicht auf die Pfeilspitzen der Axen ξ, η, ζ:

V. *In einem Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$, der kein Focalpunkt ist, wird der Winkel zwischen zwei ungleichseitigen ungleichnamigen gebrochenen Focaldistanzen, r und s' oder r' und s, von der Normale des Ellipsoides λ, der Nebenwinkel zwischen zwei gleichseitigen ungleichnamigen, r und s oder r' und s', von der Normale des einschaligen Hyperboloides μ, der Nebenwinkel zwischen zwei ungleichseitigen gleichnamigen, r und r' oder s und s', von der Normale des zweischaligen Hyperboloides ν halbirt.*

Für einen Punkt P in einer der Grenzflächen $\lambda = \gamma$, $\mu = \gamma$, $\mu = \beta$, $\nu = \beta$ oder $\nu = \alpha$ ist hierbei nach § 13, 40 als Normale der Grenzfläche die Normale ihrer Ebene anzusehen. Beispielsweise halbirt die Normale der xy-Ebene in P in Fig. 11, $\lambda = \gamma$ als Normale des Ellipsoides $\lambda = \gamma$ den gestreckten Winkel zwischen r und s', in Fig. 11, $\mu = \gamma$ aber als Normale des einschaligen Hyperboloides $\mu = \gamma$ den Nebenwinkel zwischen r und s, welcher, da die Anfangsstücke von r und s zusammenfallen, ein gestreckter ist.

Für einen Focalpunkt verliert Satz V seine volle Giltigkeit. In einem Punkte P der Focalellipse (vgl. Fig. 11, $\lambda = \mu = \gamma$) ist nämlich einerseits nur die Normale ζ des zweischaligen Hyperboloides ν bestimmt (vgl. § 9, 29, γ, γ) und haben andererseits r und r' keine Anfangsstücke. Es bleibt von Satz V nur übrig, dass die Normale ζ, die Tangente der Focalellipse, den Nebenwinkel von s und s' halbirt, da die Anfangsstücke von s und s' die Focalhalbstrahlen $+f_2$ und $+f_1$

(vgl. Anm. I, 11) in dem confocalen Kegelschnittsystem (9, z) der xy-Ebene sind. Bei den gebrochenen Hauptfocaldistanzen, wo r_0 und r_0' in die Anfangsstücke von s_0 und s_0' hineinfallen, wird dann auch der Nebenwinkel der ungebrochenen Distanzen r_0 und r_0' von der Normale ζ halbirt.

In einem Punkte P des Zweiges b (oder b') der Focalhyperbel (vgl. Fig. 11, $\mu = \nu = \beta$) ist einerseits nur die Normale ξ (vgl. § 9, 29, β, β) des Ellipsoides λ bestimmt und haben andererseits r' (oder r) ein unbestimmtes und s (oder s') ein verschwindendes Anfangsstück. Es bleibt von Satz V nur übrig, dass die Normale ξ den Winkel der gebrochenen Focaldistanzen r und s' (oder r' und s) halbirt, da deren Anfangsstücke die Focalhalbstrahlen $+f_2$ und $+f_1$ in dem confocalen Kegelschnittsystem (9, y) der xz-Ebene sind. Die willkürliche Lage von r' (r) kann aber so gewählt werden, dass r' mit s (oder r mit s') und ξ in einer Ebene liegt und der Winkel zwischen dem Anfangsstücke von r' (oder r) und der ungebrochenen Distanz s (oder s') von der Normale ξ halbirt wird. Zu dem Ende ist bei den gebrochenen Hauptfocaldistanzen, wo $s_0 = PC_0$ (oder $s_0' = PC_0'$) ist, $r_0' = PC_0'B_0'$ (oder $r_0 = PC_0B_0$) zu nehmen.

Satz V überträgt sich mit $r = r'$, $s = s'$ auf das erste und mit $r = s$, $r' = s'$ auf das zweite specielle confocale System (vgl. § 5, 12' und 12'') und kommt beidemal auf den entsprechenden Satz über das confocale Kegelschnittsystem der Meridianebene zurück (vgl. Anm. I, 11; 16).

§ 20. Die Focaleigenschaften der Focalkegelschnitte.

Die Entfernung zweier Punkte $P_1 = \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ und $P_2 = \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ einer Focallinie lässt sich nach § 14, 42 durch Integration ermitteln. Alle derartigen Bestimmungen kommen auf zwei Elementarfälle zurück. Liegt nämlich zwischen P_1 und P_2 keiner der Punkte A, B, C der Focallinie, so bleibt nach § 14, 43; 43' zwischen P_1 und P_2 die Charakteristik des Focallinienelements unverändert. Es folgt daher durch die erwähnte Integation sofort:

I. *Die absolute Entfernung zweier gleichseitiger Punkte* $P_1 = \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ *und* $P_2 = \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ *einer Focallinie, zwischen denen kein Focalpunkt liegt und zwischen denen die Charakteristik des Focallinienelementes in der Richtung von* P_1 *nach* P_2 *den Werth* $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ *hat, ist:*

$$(46) \quad P_1P_2 = \mathfrak{l}\,(\sqrt{\alpha - \lambda_1} - \sqrt{\alpha - \lambda_2}) + \mathfrak{m}\,(\sqrt{\alpha - \mu_1} - \sqrt{\alpha - \mu_2}) + \mathfrak{n}\,(\sqrt{\alpha - \nu_1} - \sqrt{\alpha - \nu_2}).$$

Diese Formel kann unmittelbar auch Anwendung finden, wenn einer oder beide Punkte P_1 und P_2 selbst an eine der Stellen A, B, C zu liegen kommen, da sie vollkommen bestimmt bleibt, obwohl dann eines oder mehr von den Differentialen in (42) unbestimmt werden.

Liegt zwischen P_1 und P_2 der Punkt $A = \lambda_0, \mu_0, \alpha$ der Focallinie, so ist nach (43) die Charakteristik von P_1 nach A stets von der Form $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, +)$ und von A nach P_2 von der Form $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, -)$ und daher nach (46):

$$\begin{aligned} P_1 A &= \mathfrak{l}(\sqrt{\alpha-\lambda_1}-\sqrt{\alpha-\lambda_0})+\mathfrak{m}(\sqrt{\alpha-\mu_1}-\sqrt{\alpha-\mu_0}) \\ &\quad +(\sqrt{\alpha-\nu_1}-\sqrt{\alpha-\alpha}) \\ A P_2 &= \mathfrak{l}(\sqrt{\alpha-\lambda_0}-\sqrt{\alpha-\lambda_2})+\mathfrak{m}(\sqrt{\alpha-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\mu_2}) \\ &\quad -(\sqrt{\alpha-\alpha}-\sqrt{\alpha-\nu_2}). \end{aligned}$$

Die Verbindung beider Formeln giebt den Satz:

II. *Die absolute Entfernung zweier ungleichseitiger Punkte* $P_1 = \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ *und* $P_2 = \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ *einer Focallinie, zwischen denen kein Focalpunkt liegt und zwischen denen die Charakteristik des Focallinienelementes in der Richtung von* P_1 *nach* P_2 *den Werth* $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \pm)$ *hat, ist:*

$$(47)\quad \begin{aligned} P_1 P_2 &= \mathfrak{l}(\sqrt{\alpha-\lambda_1}-\sqrt{\alpha-\lambda_2})+\mathfrak{m}(\sqrt{\alpha-\mu_1}-\sqrt{\alpha-\mu_2}) \\ &\quad +(\sqrt{\alpha-\nu_1}+\sqrt{\alpha-\nu_2}). \end{aligned}$$

Nach der Bedeutung der Charakteristik (vgl. § 14) werden durch die Hinzufügung der Symbole $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$, soweit sie die Werthe ± 1 haben, die in den runden Klammern der Formeln (46) und (47) befindlichen Differenzen auf ihre absoluten Werthe gebracht. Treten die Punkte P_1 und P_2 mit Erhaltung der Voraussetzung, dass kein Focalpunkt zwischen ihnen liegt, in das Gebiet $\lambda = \gamma$ der xy-Ebene ein, so ist es nicht nöthig den Werth des Symbols $\mathfrak{l}$, wie es nach § 13, 40 erforderlich wäre, aus $\pm$ in 0 umzuändern, da der absolute Werth der Differenz, welche in (46), (47) den Factor $\mathfrak{l}$ hat, mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \gamma$ von selbst verschwindet. Entsprechendes gilt für die Annahmen $\mu_1 = \mu_2 = \gamma$ oder $\mu_1 = \mu_2 = \beta$ oder $\nu_1 = \nu_2 = \beta$, jedoch für $\nu_1 = \nu_2 = \beta$ nur mit Bezug auf die Formel (46). Denn wenn die Punkte P_1 und P_2 mit $\nu_1 = \nu_2 = \beta$ (ohne dass zugleich $\mu_1 = \mu_2 = \beta$ ist) ungleichseitig, also auf der concaven Seite verschiedener Zweige der Focalhyperbel liegen, so befinden sich zwischen ihnen zwei Punkte der Focalhyperbel, sodass die Voraussetzungen von Satz II nicht erfüllt sind.

Es seien nun zwei ungleichnamige Focalpunkte $B = \lambda, \beta, \beta$ und $C = \gamma, \gamma, \nu$ (vgl. § 6, zu II) gegeben, die zunächst nicht beide in der xy- oder beide in der xz-Ebene liegen sollen. Dann befindet sich zwischen

B und C nach § 14, 43 kein weiterer Focalpunkt und ist die Charakteristik in der Richtung von B nach C stets $(+-+)$ bei gleichseitiger und $(+-\pm)$ bei ungleichseitiger Lage beider Punkte. Es folgt daher aus Satz I und II:

$$BC = +(\sqrt{\alpha-\lambda}-\sqrt{\alpha-\gamma})-(\sqrt{\alpha-\beta}-\sqrt{\alpha-\gamma})+(\sqrt{\alpha-\beta}\mp\sqrt{\alpha-\nu})$$

und damit der Satz:

III. *Die absolute Entfernung zweier ungleichnamiger Focalpunkte* $B=\lambda, \beta, \beta$ *und* $C=\gamma, \gamma, \nu$ *ist:*

$$BC = \sqrt{\alpha-\lambda}\mp\sqrt{\alpha-\nu}, \tag{48}$$

wo das obere Zeichen bei gleichseitiger, das untere bei ungleichseitiger Lage beider Punkte gilt.

Die Formel (48) gilt nach dem vorhin Bemerkten auch, wenn beide Punkte B, C in der ersten oder zweiten Hauptebene liegen, falls sich kein Focalpunkt zwischen ihnen befindet. In der xy-Ebene ist aber (vgl. Fig. 1) BC die Verbindungslinie eines Punktes C der Focalellipse mit einem der Scheitelpunkte B_0 und B_0' der Focalhyperbel, sodass zwischen beiden kein Focalpunkt vorhanden sein kann. In der xz-Ebene ist (vgl. Fig. 1) BC die Verbindungslinie eines Punktes B der Focalhyperbel mit einem der Scheitelpunkte der Focalellipse, dem mit B gleichseitigen C_0 oder dem mit B ungleichseitigen C_0'. Zwischen B und C_0 liegt kein Focalpunkt, dagegen zwischen $B=\lambda, \beta, \beta$ und $C_0'=\gamma, \gamma, \nu$ ein Punkt der Focalhyperbel. Es ist aber BC_0' in dem confocalen Kegelschnittsystem $(9, y)$ der xz-Ebene die ungleichseitige Focaldistanz des Punktes $B: \lambda^{\cdot\cdot}=\lambda$, $\mu^{\cdot\cdot}=\beta$ (vgl. § 6, IV), also (vgl. Anm. I, 15):

$$BC_0' = \sqrt{\alpha-\lambda}+\sqrt{\alpha-\beta}.$$

Da dieser selbige Werth mit $\nu=\beta$ und dem unteren Vorzeichen aus der Formel (48) hervorgeht, so ist deren *unbeschränkte* Giltigkeit festgestellt.

Eine Folge des erhaltenen Resultates sind drei Sätze, welche die *Dupin'schen Focaleigenschaften der Focalkegelschnitte**) heissen.

Sind zuerst $B=\lambda, \beta, \beta$ und $B'=\lambda', \beta, \beta$ zwei ungleichseitige feste Punkte der Focalhyperbel und $C=\gamma, \gamma, \nu$ der laufende Punkt der Focalellipse (vgl. Fig. 12), so ist nach (48)

$$CB = \sqrt{\alpha-\lambda}\mp\sqrt{\alpha-\nu}, \quad CB' = \sqrt{\alpha-\lambda'}\pm\sqrt{\alpha-\nu},$$

*) Vgl. Dupin, a. § 3 a. O., S. 280.

wo die oberen oder unteren Vorzeichen gelten, jenachdem C mit B oder mit B' gleichseitig liegt. Dass die Summe

$$(49) \qquad CB + CB' = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \lambda'}$$

von ν unabhängig ist, giebt den Satz:

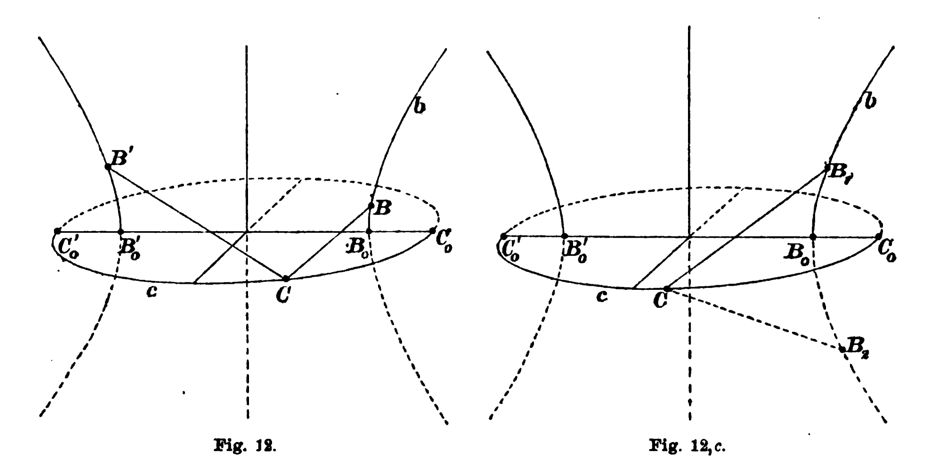


Fig. 12. Fig. 12, c.

IV. *Die Summe der Entfernungen jedes beliebigen Punktes der Focalellipse von zwei ungleichseitigen festen Punkten der Focalhyperbel ist dieselbe.*

Dieser Satz wurde bereits in § 18 unter [III, β, β] aufgeführt.

Sind dagegen $B_1 = \lambda_1, \beta, \beta$ und $B_2 = \lambda_2, \beta, \beta$ zwei gleichseitige Punkte der Focalhyperbel und $C = \gamma, \gamma, \nu$ der laufende Punkt der Focalellipse (vgl. Fig. 12, c), so wird nach (48)

$$CB_1 = \sqrt{\alpha - \lambda_1} \mp \sqrt{\alpha - \nu}, \quad CB_2 = \sqrt{\alpha - \lambda_2} \mp \sqrt{\alpha - \nu},$$

wo die oberen oder unteren Vorzeichen gelten, jenachdem C mit B_1, B_2 gleichseitig oder ungleichseitig liegt. Dass die Differenz:

$$(49, c) \qquad CB_1 - CB_2 = \sqrt{\alpha - \lambda_1} - \sqrt{\alpha - \lambda_2}$$

von ν unabhängig ist, giebt den Satz:

V. *Die Differenz der Entfernungen jedes beliebigen Punktes der Focalellipse von zwei gleichseitigen festen Punkten der Focalhyperbel ist dieselbe.*

Sind endlich $C_1 = \gamma, \gamma, \nu_1$ und $C_2 = \gamma, \gamma, \nu_2$ zwei feste Punkte der Focalellipse und $B = \lambda, \beta, \beta$ der laufende Punkt der Focalhyperbel (vgl. Fig. 12, b), so wird nach (48)

$$BC_1 = \sqrt{\alpha - \lambda} \mp \sqrt{\alpha - \nu_1}, \quad BC_2 = \sqrt{\alpha - \lambda} \mp \sqrt{\alpha - \nu_2},$$

wo in jeder Formel unabhängig von der anderen das obere oder untere Vorzeichen gelten kann. In jedem Falle ist die Differenz:

(49, *b*) $$BC_1 - BC_2 = \mp\sqrt{\alpha - \nu_1} \pm \sqrt{\alpha - \nu_2}$$

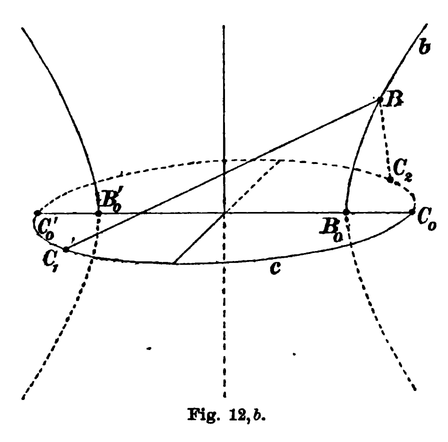


Fig. 12, *b*.

von λ unabhängig und wechselt nur ihr Vorzeichen, wenn B von einem Zweig der Focalhyperbel auf den anderen übergeht.

VI. *Die Differenz der Entfernungen jedes beliebigen Punktes der Focalhyperbel von zwei festen Punkten der Focalellipse ist ihrem absoluten Werthe nach dieselbe.*

Satz IV geht mit $B = B_0$ und $B' = B_0'$ in die gewöhnliche Focaleigenschaft der Ellipse, Satz VI mit $C_1 = C_0'$ und $C_2 = C_0$ in die gewöhnliche Focaleigenschaft der Hyperbel über, Satz V wird mit $B_1 = B_2 = B_0$ trivial.

Bei der ersten speciellen Form der Focalkegelschnitte lösen sich die drei Sätze in die Bemerkung auf, dass die Entfernung des laufenden Punktes C des Focalkreises c von einem festen Punkte B der Focalaxe b eine unveränderliche Entfernung hat (vgl. Fig. 1′).

Bei der zweiten speciellen Form gehen sie in selbstverständliche Sätze über, welche sich auf drei Punkte der x-Axe beziehen (vgl. Fig. 1″).

§ 21. Die Länge der gebrochenen Focaldistanzen.

Indem wir uns zur Bestimmung der Länge der gebrochenen Focaldistanzen wenden, betrachten wir zuerst ihre Anfangsstücke. Diese enthalten, so oft der laufende Punkt $P(P')$ ausserhalb der Ebenen der Focalkegelschnitte liegt, nach (44) und (45) zwischen ihm und dem Gleitpunkte keinen Focalpunkt. Ihre Länge bestimmt sich daher mittels der beiden Sätze § 20, I und II.

Um gleich beide Lagen P und P' des laufenden Punktes zu umfassen, denken wir uns unter P und P' zwei Punkte, die Spiegelbilder voneinander in Bezug auf die yz-Ebene sind (wie auch in den beiden Figuren 11 angenommen ist), also nach § 6, II dieselben elliptischen Coordinaten haben. Wegen der Symmetrie der Focalkegelschnitte in Bezug auf die yz-Ebene gilt dann dasselbe auch von den gleichnamigen Gleitpunkten der gebrochenen Focaldistanzen beider Punkte P und P', sodass wir die elliptischen Coordinaten der betreffenden Punkte (vgl. Fig. 11) folgendermaassen bezeichnen dürfen:

$$\left.\begin{matrix} P \\ P' \end{matrix}\right\} = \lambda, \mu, \nu \quad \left.\begin{matrix} C_4 \\ C_4' \end{matrix}\right\} = \gamma, \gamma, \nu_4 \quad \left.\begin{matrix} C_3'(C_3) \\ C_3(C_3') \end{matrix}\right\} = \gamma, \gamma, \nu_3$$
$$\left.\begin{matrix} B_2 \\ B_2' \end{matrix}\right\} = \lambda_2, \beta, \beta \quad \left.\begin{matrix} B_1' \\ B_1 \end{matrix}\right\} = \lambda_1, \beta, \beta,$$

wo die Punkte der oberen und die der unteren Zeilen je zusammengehören und die eingeklammerte Möglichkeit bei C_3', C_3 nach § 15, IV zu berücksichtigen ist. Die Charakteristiken der Anfangsstücke der gebrochenen Focaldistanzen (45) sind nun nach § 19, I und § 13, 37 in der Richtung von P nach dem Gleitpunkte:

$$\left.\begin{matrix} PC_4 \\ P'C_4' \end{matrix}\right\}(+--) \quad \left.\begin{matrix} PC_3'(C_3) \\ P'C_3(C_3') \end{matrix}\right\}(+-\pm)\big((+-+)\big)$$
$$\left.\begin{matrix} PB_2 \\ P'B_2' \end{matrix}\right\}(++-) \quad \left.\begin{matrix} PB_1' \\ P'B_1 \end{matrix}\right\}(++\pm).$$

Das doppelte dritte Vorzeichen in den Charakteristiken tritt wie in § 20, II bei ungleichseitiger Lage der betreffenden Punkte auf. Nach § 20, I und II ist nunmehr:

$$\begin{aligned} PC_4 = P'C_4' &= +\left(\sqrt{\alpha-\lambda}-\sqrt{\alpha-\gamma}\right)-\left(\sqrt{\alpha-\mu}-\sqrt{\alpha-\gamma}\right) \\ &\quad -\left(\sqrt{\alpha-\nu}-\sqrt{\alpha-\nu_4}\right), \\ PC_3'(C_3) = P'C_3(C_3') &= +\left(\sqrt{\alpha-\lambda}-\sqrt{\alpha-\gamma}\right)-\left(\sqrt{\alpha-\mu}-\sqrt{\alpha-\gamma}\right) \\ &\quad +\left(\sqrt{\alpha-\nu}+(-)\sqrt{\alpha-\nu_3}\right) \\ PB_2 = P'B_2' &= +\left(\sqrt{\alpha-\lambda}-\sqrt{\alpha-\lambda_2}\right)+\left(\sqrt{\alpha-\mu}-\sqrt{\alpha-\beta}\right) \\ &\quad -\left(\sqrt{\alpha-\nu}-\sqrt{\alpha-\beta}\right) \\ PB_1' = P'B_1 &= +\left(\sqrt{\alpha-\lambda}-\sqrt{\alpha-\lambda_1}\right)+\left(\sqrt{\alpha-\mu}-\sqrt{\alpha-\beta}\right) \\ &\quad +\left(\sqrt{\alpha-\nu}+\sqrt{\alpha-\beta}\right), \end{aligned}$$

wo in der zweiten Formel dem eingeklammerten Buchstaben links das eingeklammerte Vorzeichen rechts entspricht. Die Ausdrücke reduciren sich auf:

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} PC_4 = P'C_4' &= +\sqrt{\alpha-\lambda}-\sqrt{\alpha-\mu} \\ &\quad -\sqrt{\alpha-\nu}+\sqrt{\alpha-\nu_4} \\ PC_3'(C_3) = P'C_3(C_3') &= +\sqrt{\alpha-\lambda}-\sqrt{\alpha-\mu} \\ &\quad +\sqrt{\alpha-\nu}+(-)\sqrt{\alpha-\nu_3} \\ PB_2 = P'B_2' &= +\sqrt{\alpha-\lambda}+\sqrt{\alpha-\mu} \\ &\quad -\sqrt{\alpha-\nu}-\sqrt{\alpha-\lambda_2} \\ PB_1' = P'B_1 &= +\sqrt{\alpha-\lambda}+\sqrt{\alpha-\mu} \\ &\quad +\sqrt{\alpha-\nu}-\sqrt{\alpha-\lambda_1}. \end{aligned}\right.$$

Fällt der Punkt P, auf den wir uns hierbei beschränken, in die xy- oder xz-Ebene, so gilt die Ableitung der Formeln (50) nach der in § 20 zu I und II gemachten Bemerkung ohne weiteres, so oft sich zwischen P und den betreffenden Gleitpunkt nicht ein Focalpunkt einschiebt.

Dies ist für $\lambda = \gamma$ (vgl. Fig. 11, $\lambda = \gamma$) bei keinem der vier Anfangsstücke PC_4, $PC_3'(C_3)$, PB_2, PB_1', für $\mu = \gamma$ (vgl. Fig. 11, $\mu = \gamma$) bei den beiden ersten nicht der Fall, sodass die bezüglichen Formeln (50) in Kraft bleiben. Dagegen wird die Ableitung der beiden letzten Formeln (50) unbrauchbar, da im Gegensatz zu der dabei gemachten Voraussetzung zwischen P und $B_2 = B_0$ der Focalpunkt C_4, zwischen P und $B_1' = B_0'$ der Focalpunkt $C_3'(C_3)$ liegt. Statt nun die so entstehenden zwei Abschnitte der Strecken PB_2 und PB_1' einzeln nach § 20, I und II zu berechnen und zu addiren, können wir die ganzen Strecken sofort als Focaldistanzen des Punktes $\lambda^{\cdot}$, $\mu^{\cdot} = \lambda$, ν (vgl. § 6, IV) in dem elliptischen Coordinatensystem der xy-Ebene angeben (vgl. Anm. I, 15):

$$PB_2 = PB_0 = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \nu}, \quad PB_1' = PB_0' = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \nu}.$$

Darnach bleiben aber die letzten Formeln (50) auch jetzt bestehen, da sie sich mit $\mu = \gamma$, $\lambda_1 = \gamma$, $\lambda_2 = \gamma$ auf die eben angegebenen Ausdrücke reduciren. Ist endlich P ein Punkt der Focalellipse, so wird die obige Ableitung der Formeln (50), welche die vier Focalstrahlen $+ f_i$ des Punktes P benutzt, hinfällig. Dagegen ist (vgl. Fig. 11, $\lambda = \mu = \gamma$) jetzt $PC_4 = 0$, $PC_3 = 0$, während PB_2 und PB_1', wie oben, als Focaldistanzen des Punktes $\lambda^{\cdot}$, $\mu^{\cdot} = \gamma$, ν in der Ebene sich ergeben. Die Formeln (50) entsprechen auch jetzt, da in ihnen $\lambda = \mu = \gamma$, $\nu_3 = \nu_4 = \nu$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \gamma$ zu setzen wäre, diesen Anforderungen.

Im Gebiete $\mu = \beta$ der xz-Ebene (vgl. Fig. 11, $\mu = \beta$) liegt wieder zwischen P und $C_4 = C_0$, sowie zwischen P und $C_3' = C_0'$ ein Focalpunkt, sodass die Ableitung der beiden ersten Formeln (50) hinfällig wird. Als Focaldistanzen des Punktes $\lambda^{\cdot\cdot}$, $\mu^{\cdot\cdot} = \lambda$, ν in dem elliptischen Coordinatensystem der xz-Ebene (vgl. § 6, IV) sind aber:

$$PC_4 = PC_0 = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \nu}, \quad PC_3' = PC_0' = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \nu},$$

was auch aus den beiden ersten Formeln (50) mit $\mu = \nu_3 = \nu_4 = \beta$ und dem ersten Vorzeichen von $\sqrt{\alpha - \nu_3}$ sich ergiebt. Die beiden letzten Formeln bedürfen eines anderweiten Beweises nicht.

Im Gebiete $\nu = \beta$ der xz-Ebene (vgl. Fig. 11, $\nu = \beta$) gelten die drei ersten Formeln (50), da zwischen P und dem betreffenden Gleitpunkt kein Focalpunkt liegt; es ist nur $\nu = \nu_4 = \nu_3 = \beta$ und das

eingeklammerte Vorzeichen von $\sqrt{\alpha - \nu_3}$ zu nehmen. Dagegen wird die Ableitung der vierten hinfällig, da sich zwischen P und B_1' ein Focalpunkt einschiebt. Es ist aber in dem ebenen elliptischen Coordinatensystem $\lambda^{\cdot\cdot}, \mu^{\cdot\cdot}$, wo P und B_1' die Coordinaten $\lambda^{\cdot\cdot}, \mu^{\cdot\cdot} = \lambda, \mu$ und $= \lambda_1, \beta$ haben:

$$PB_1' = PC_0' - B_1'C_0' = (\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu}) - (\sqrt{\alpha - \lambda_1} - \sqrt{\alpha - \beta}),$$

wie auch die vierte Formel (50) mit $\nu = \beta$ richtig ergiebt.

Ist endlich P auf der Focalhyperbel gelegen (vgl. Fig. 11, $\mu = \nu = \beta$), so sind die Formeln (50) von neuem zu begründen, da P nicht die dort vorausgesetzten vier Focalhalbstrahlen $+ f_i$, sondern unendlich viele besitzt. Das Anfangsstück $PC_4 = PC_0$ hat hier als gleichseitige Focaldistanz des Punktes $\lambda^{\cdot\cdot}, \mu^{\cdot\cdot} = \lambda, \beta$ in der Ebene die Länge:

$$PC_4 = PC_0 = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \beta},$$

was aus der ersten Formel (50) mit $\mu = \nu = \nu_4 = \beta$ richtig hervorgeht. Ferner ist $C_3'(C_3)$ völlig unbestimmt, aber doch die zweite Formel (50), die sich mit $\mu = \nu = \beta$ auf:

$$PC_3'(C_3) = \sqrt{\alpha - \lambda} + (-)\sqrt{\alpha - \nu_3}$$

reducirt, nach (48) immer giltig. Auch die dritte Formel, in der $\lambda_2 = \lambda$, $\mu = \nu = \beta$ zu setzen wäre, giebt damit $PB_2 = 0$, wie denn auch B_2 mit P zusammenfällt. Endlich ist, wie eben bei $\nu = \beta$, $\mu \neq \beta$:

$$PB_1' = PC_0' - B_1'C_0' = (\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \beta}) - (\sqrt{\alpha - \lambda_1} - \sqrt{\alpha - \beta}),$$

was auch die vierte Formel (50) mit $\mu = \nu = \beta$ giebt.

Die Formeln (50) *geben also die Längen der Anfangsstücke der gebrochenen Focaldistanzen ausnahmlos für jede Lage des Punktes* λ, μ, ν

Die Endstücke der gebrochenen Focaldistanzen verbinden nach § 19, 45 die Gleitpunkte

$C_4 = \gamma, \gamma, \nu_4,\ \ C_3'(C_3) = \gamma, \gamma, \nu_3,\ \ B_2 = \lambda_2, \beta, \beta,\ \ B_1' = \lambda_1, \beta, \beta$ (für P)
oder
$C_3(C_3') = \gamma, \gamma, \nu_3,\ \ C_4' = \gamma, \gamma, \nu_4,\ \ B_1 = \lambda_1, \beta, \beta,\ \ B_2' = \lambda_2, \beta, \beta$ (für P')
bezüglich mit den ungleichnamigen Focalpunkten:

$$B^0 = \lambda^0, \beta, \beta,\quad B^{0\prime} = \lambda^{0\prime}, \beta, \beta,\quad C^0 = \gamma, \gamma, \nu^0,\quad C^{0\prime} = \gamma, \gamma, \nu^{0\prime},$$

wobei die Symmetrie gegen die yz-Ebene im Allgemeinen nicht mehr vorliegt, wie bei den Anfangsstücken. Nach (48) ist:

$$(51)\begin{cases} C_4B^0 = \sqrt{\alpha - \lambda^0} - \sqrt{\alpha - \nu_4} & C_3(C_3')B^0 = \sqrt{\alpha - \lambda^0} - (+)\sqrt{\alpha - \nu_3} \\ C_3'(C_3)B^{0\prime} = \sqrt{\alpha - \lambda^{0\prime}} - (+)\sqrt{\alpha - \nu_3} & C_4'B^{0\prime} = \sqrt{\alpha - \lambda^{0\prime}} - \sqrt{\alpha - \nu_4} \\ B_2C^0 = \sqrt{\alpha - \lambda_2} - \sqrt{\alpha - \nu^0} & B_1C^0 = \sqrt{\alpha - \lambda_1} - \sqrt{\alpha - \nu^0} \\ B_1'C^{0\prime} = \sqrt{\alpha - \lambda_1} - \sqrt{\alpha - \nu^{0\prime}} & B_2'C_0' = \sqrt{\alpha - \lambda_2} - \sqrt{\alpha - \nu^{0\prime}}. \end{cases}$$

Werden nun die Formeln (50) und (51) addirt, wie sie nach (45) zusammengehören, so fallen die Coordinaten aller Gleitpunkte heraus und zeigt sich, dass die Längen von r, r', s, s' sich für die Punkte P und P' nur im Vorzeichen von $\sqrt{\alpha - \nu}$ unterscheiden, ein Unterschied, der wieder verschwindet, so oft mit $\nu = \alpha$ die Trennung der Punkte P und P' aufhört. Auf diese Weise erhalten wir das Gesammtresultat:

Die absoluten Längen der vier gebrochenen Focaldistanzen eines Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ von den vier festen Focalpunkten $B^0 = \lambda^0, \beta, \beta$, $B^{0\prime} = \lambda^{0\prime}, \beta, \beta$, $C^0 = \gamma, \gamma, \nu^0$, $C^{0\prime} = \gamma, \gamma, \nu^{0\prime}$ sind:

$$(52)\qquad \begin{cases} r = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \lambda^0} \\ r' = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} + \sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \lambda^{0\prime}} \\ s = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \nu^0} \\ s' = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} + \sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \nu^{0\prime}}, \end{cases}$$

wo die Quadratwurzel $\sqrt{\alpha - \nu}$ positiv oder negativ zu nehmen ist, jenachdem P mit B^0, C^0 oder mit $B^{0\prime}$, $C^{0\prime}$ gleichseitig liegt.

Die Formeln gelten *ausnahmlos* für jede Lage des Punktes P.

Durch Annahme der besonderen Werthe $\lambda^0 = \lambda^{0\prime} = \gamma$, $\nu^0 = \nu^{0\prime} = \beta$, welche zu $B^0 = B_0$, $B^{0\prime} = B_0'$, $C^0 = C_0$, $C^{0\prime} = C_0'$ gehören, folgt der speciellere Satz:

Die absoluten Längen der vier gebrochenen Hauptfocaldistanzen eines Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ sind:

$$(53)\qquad \begin{cases} r_0 = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \gamma} \\ r_0' = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} + \sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \gamma} \\ s_0 = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \beta} \\ s_0' = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} + \sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \beta}, \end{cases}$$

wo die Quadratwurzel $\sqrt{\alpha - \nu}$ positiv oder negativ ist, jenachdem P auf der Seite derjenigen Hauptbrennpunkte liegt, auf die sich r_0, s_0, oder derjenigen, auf die sich r_0', s_0' beziehen.

Die gefundenen Formeln, welche sich auf das allgemeine System der confocalen Ellipsoide und Hyperboloide (vgl. Fig. 4) und die zugehörigen elliptischen Coordinaten λ, μ, ν beziehen, gelten, wie wir an (53) zeigen wollen, auch für die drei speciellen confocalen Systeme und zugehörigen elliptischen Coordinaten. Dabei bedarf es der in § 5 behandelten Grenzübergänge von den allgemeinen zu den speciellen Systemen nicht, sondern können die dortigen Substitutionen (13′), (13″), (13‴) direct mit $\varepsilon = 0$ gebraucht werden.

Für das *erste specielle confocale System* (vgl. Fig. 4′) geht nämlich aus (53) mit $\beta = \nu = \alpha$ hervor:

$$(53') \qquad \begin{cases} r_0 = r_0' = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} + \sqrt{\alpha - \gamma} \\ s_0 = s_0' = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu}. \end{cases}$$

In der That fallen (vgl. Fig. 11′) r_0 und r_0', s_0 und s_0' je in die unter § 19, IV′ definirten gebrochenen Hauptfocaldistanzen zusammen. Dass diese aber die Längen (53′) haben, folgt daraus, dass jetzt (vgl. § 6, zu 17) λ, μ die elliptischen Coordinaten des Punktes P in seiner Meridianebene sind: Das Anfangsstück PC_4 (vgl. Fig. 11′) hat als gleichseitige Focaldistanz in der Meridianebene (vgl. Anm. I, 53⁰) die Länge $\sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu}$ und das Endstück $C_4 O$ als Radius des Focalkreises § 2, 8′ die Länge $\sqrt{\alpha - \gamma}$; ferner kann s_0, obwohl (vgl. Fig. 11′) im Allgemeinen gebrochen, doch nach der § 20, Ende erwähnten Dupinschen Focaleigenschaft von Focalkreis und Focalaxe, ebensogut über B_1' geradlinig fortgesetzt, also mit der ungleichseitigen Focaldistanz in der Meridianebene von der Länge $\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu}$ identificirt werden. Von der dritten elliptischen Coordinate ν' (vgl. § 6, zu 17′) sind r_0, s_0 unabhängig.

Für das *zweite specielle confocale System* (vgl. Fig. 4″) geht aus (53) mit $\beta = \mu = \gamma$ hervor:

$$(53'') \qquad \begin{cases} r_0 = s_0 = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \nu} \\ r_0' = s_0' = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \nu}. \end{cases}$$

In der That fallen (vgl. Fig. 11″) r_0 und s_0, r_0' und s_0' je in die unter § 19, IV″ definirten ungebrochenen Hauptfocaldistanzen zusammen. Dass diese die Längen (53″) haben, bestätigt sich dadurch, dass jetzt (vgl § 6, zu 17″) λ, ν die elliptischen Coordinaten des Punktes P in seiner Meridianebene und r_0, r_0' seine beiden Focaldistanzen in ihr sind (vgl. Anm. I, 53⁰); von der dritten elliptischen Coordinate μ' sind sie unabhängig.

Für das *dritte specielle confocale System* (vgl. Fig. 4‴) geht aus (53) mit $\gamma = \mu = \beta = \nu = \alpha$ hervor:

$$(53''') \qquad r_0 = r_0' = s_0 = s_0' = \sqrt{\alpha - \lambda},$$

die absolute Entfernung des Punktes P mit den elliptischen Kugelcoordinaten λ, μ', ν' (vgl. § 6, zu 17‴) vom Centrum.

§ 22. Die Focaleigenschaft des Ellipsoides.

Je zwei gebrochene Focaldistanzen eines Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$, deren Winkel (vgl. § 19, V) von der Normale ξ des Ellipsoides λ halbirt wird, haben nach (52) eine von μ und ν unabhängige Summe:

$$(54)\quad \begin{cases} r + s' = 2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \lambda^0} - \sqrt{\alpha - \nu^{0\prime}} \\ r' + s = 2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \lambda^{0\prime}} - \sqrt{\alpha - \nu^0}. \end{cases}$$

Eine solche Summe besitzt für zwei verschiedene Punkte λ, μ, ν des Raumes (vgl. § 6) immer dann und nur dann denselben Werth, wenn diese auf demselben Ellipsoide λ des confocalen Systems (§ 4, 12) liegen. Da aber nach § 2 jedes dreiaxige Ellipsoid einem solchen System angehört, ergiebt sich der folgende allgemein giltige Satz:

I. *Für jeden Punkt eines dreiaxigen Ellipsoides ist die Summe zweier ungleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Focaldistanzen dieselbe und wird der Winkel beider Distanzen von der Normale des Ellipsoides halbirt.*

Werden hier an Stelle der auf vier beliebige Focalpunkte B^0, $B^{0\prime}$, C^0, $C^{0\prime}$ bezüglichen gebrochenen Focaldistanzen die gebrochenen Hauptfocaldistanzen eingeführt, also $\lambda^0 = \lambda^{0\prime} = \gamma$, $\nu^0 = \nu^{0\prime} = \beta$ genommen, so nehmen die Gleichungen (54) die speciellere Form an:

$$(55)\quad \begin{cases} r_0 + s_0' = 2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta} \\ r_0' + s_0 = 2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta}, \end{cases}$$

aus der aber mit Hilfe der Dupin'schen Focaleigenschaften der Focalkegelschnitte die allgemeinere wieder hergeleitet werden kann.

Da nämlich (vgl. Fig. 11) B^0 und B_0 zwei gleichseitige Punkte der Focalhyperbel sind, so ist nach § 20, 49, c unabhängig von C_4:

$$C_4B^0 - C_4B_0 = \sqrt{\alpha - \lambda^0} - \sqrt{\alpha - \gamma};$$

da ferner $C^{0\prime}$ und C_0' zwei Punkte der Focalellipse und beide mit B_1' gleichseitig sind, so ist nach § 20, 49, b

$$B_1'C^{0\prime} - B_1'C_0' = -\sqrt{\alpha - \nu^{0\prime}} + \sqrt{\alpha - \beta}.$$

Die Verbindung beider Formeln giebt (vgl. Fig. 11):

$$PC_4B^0 + PB_1'C^{0\prime} = PC_4B_0 + \sqrt{\alpha - \lambda^0} - \sqrt{\alpha - \gamma} + PB_1'C_0' - \sqrt{\alpha - \nu^{0\prime}} + \sqrt{\alpha - \beta}$$

oder nach (45):

$$r + s' = r_0 + s_0' - \sqrt{\alpha - \gamma} + \sqrt{\alpha - \beta} + \sqrt{\alpha - \lambda^0} - \sqrt{\alpha - \nu^{0\prime}}.$$

Hieraus aber geht unter der Voraussetzung der ersten Formel (55) die erste (54) hervor. Die analogen Beziehungen finden für die Lage P'

(vgl. Fig. 11) des laufenden Punktes, sowie für die zweiten Gleichungen (55) und (54) statt.

II. *Die Eigenschaft* (54) *des Ellipsoides ist daher eine Combination der specielleren Eigenschaften* (55) *mit den Dupin'schen Focaleigenschaften der Focalkegelschnitte.*

Wir können daher die allgemeine Focaleigenschaft des Ellipsoides in den Gleichungen (55) erblicken, welche, da $2\sqrt{\alpha - \lambda} = SS'$ die Hauptaxenlänge,

$$2\sqrt{\alpha - \beta} = B_0 B_0'$$

die kleine und

$$2\sqrt{\alpha - \gamma} = C_0 C_0'$$

die grosse Hauptbrennweite (vgl. § 1) der Fläche sind, in Worten lautet (vgl. § 19, V):

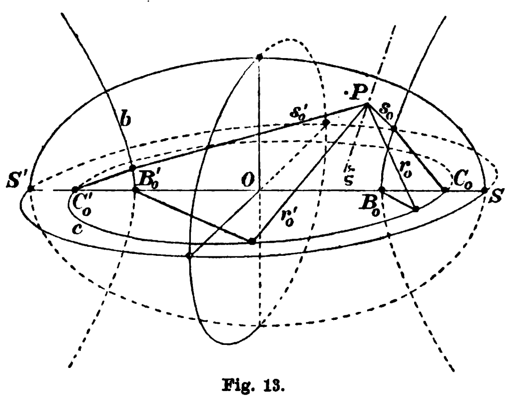


Fig. 13.

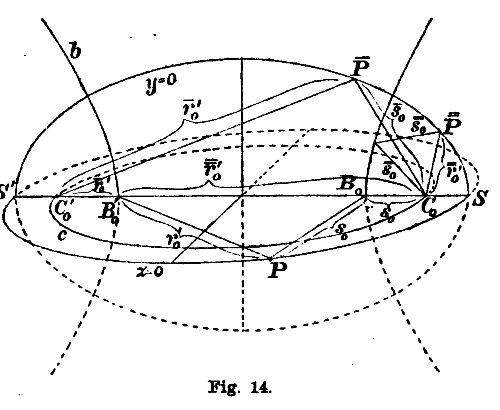


Fig. 14.

III. *Für jeden Punkt des Ellipsoides ist die Summe zweier ungleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Hauptfocaldistanzen* $(r_0 + s_0'$ *oder* $r_0' + s_0)$ *gleich der Hauptaxenlänge* (SS') *des Ellipsoides, vermehrt um die halbe Differenz seiner beiden Hauptbrennweiten* $(C_0C_0'$ *und* $B_0B_0')$ *und wird der Winkel beider Distanzen von der Normale* (ξ) *des Ellipsoides halbirt* (vgl. Fig. 13).

Die Focaleigenschaft III des Ellipsoides vereinigt in sich die einfachen und einen Theil der zusammengesetzten Focaleigenschaften der beiden elliptischen Hauptschnitte in der xy-Ebene und xz-Ebene.

Der Hauptschnitt $z = 0$ des Ellipsoides λ (vgl. Fig. 14) ist eine Ellipse, welche dessen innere Hauptbrennpunkte B_0, B_0' als Brennpunkte hat und ausserhalb der Focalellipse c liegt (vgl. § 3). Für einen Punkt P des Hauptschnittes sind nach Fig. 11, $\mu = \gamma$ die gebrochenen Hauptfocaldistanzen $r_0 = PB_0$ und $r_0' = PB_0'$ die directen Verbindungslinien des Punktes mit den Brennpunkten B_0 und B_0'. Mit r_0 und r_0' fallen zugleich die Anfangsstücke der gebrochenen

Hauptfocaldistanzen $s_0 = PB_0C_0$ und $s_0' = PB_0'C_0'$ (in Fig. 14 sind nur r_0' und s_0 gezeichnet) zusammen, deren Endstücke, unabhängig vom Punkte P des Hauptschnittes in B_0C_0 und $B_0'C_0'$ fallend, die Länge: $\sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta}$ haben. Mit Unterdrückung dieser Grösse geben also beide Gleichungen (55) die Focaleigenschaft:

$$PB_0 + PB_0' = 2\sqrt{\alpha - \lambda}$$

der Ellipse.

Der Hauptschnitt $y = 0$ des Ellipsoides λ (vgl. Fig. 14) ist eine Ellipse, welche dessen äussere Hauptbrennpunkte C_0, C_0' als Brennpunkte hat und von der Focalhyperbel b in dessen Kreispunkten geschnitten wird. Für einen Punkt P des Hauptschnittes ist die Bedeutung der Gleichungen (55) eine verschiedene, jenachdem er in dem Gebiete $\mu = \beta$ zwischen beiden Zweigen der Focalhyperbel oder in einem Gebiete $\nu = \beta$ rechts vom rechten oder links vom linken Zweige liegt. Im Gebiete $\mu = \beta$ sind die gebrochenen Focaldistanzen $s_0 = PC_0$ und $s_0' = PC_0'$ nach Fig. 11, $\mu = \beta$ die directen Distanzen des Punktes P (in Fig. 14 sind P, s_0, r_0' für diesen Fall mit Horizontalstrichen versehen) von den Brennpunkten C_0 und C_0'. Mit s_0 und s_0' fallen zugleich die Anfangsstücke der gebrochenen Focaldistanzen $r_0 = PC_0B_0$ und $r_0' = PC_0'B_0'$ zusammen, deren Endstücke, unabhängig vom Punkte P der betrachteten Abschnitte des Hauptschnittes in B_0C_0 und $B_0'C_0'$ fallend, die Länge $\sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta}$ haben. Mit Unterdrückung dieser Grösse geben beide Gleichungen (55) die Focaleigenschaft

$$PC_0 + PC_0' = 2\sqrt{\alpha - \lambda}$$

der Ellipse. In einem der beiden Gebiete $\nu = \beta$, etwa dem rechten, bleibt nach Fig. 11, $\nu = \beta$ die Bedeutung der ersten Gleichung (55) mit $r_0 = PC_0B_0$ und $s_0' = PC_0'$ dieselbe, während die der zweiten mit $r_0' = PC_0B_0'$ und $s_0 = PB_2C_0$ (in Fig. 14 sind P, r_0', s_0 mit zwei Horizontalstrichen bezeichnet und B_2 bei dem Gleitpunkt von s_0 auf b weggelassen) eine andere wird. Die Gleichung lautet nämlich mit beiderseitiger Subtraction der vom Punkte P des betrachteten Abschnittes auf dem Hauptschnitte unabhängigen Strecke $B_0'C_0 = \sqrt{\alpha - \gamma} + \sqrt{\alpha - \beta}$:

$$PC_0 + PB_2C_0 = 2\sqrt{\alpha - \lambda} - 2\sqrt{\alpha - \beta},$$

giebt also eine zusammengesetzte Focaleigenschaft der Ellipse gegen die confocale Focalhyperbel, welche wir mit Rücksicht auf die Definition von s_0 (vgl. § 19, IV) so formuliren können:

IV. *Für jeden Punkt der Ellipse innerhalb (auf der concaven Seite) des einen Zweiges einer zu ihr confocalen Hyperbel ist die Summe der*

directen und der kürzesten über den Hyperbelzweig genommenen Distanz von dem innerhalb des Zweiges liegenden Brennpunkt gleich der Differenz der Hauptaxenlängen von Ellipse und Hyperbel (vgl. den directen Beweis Anm. I, 17, III).

Im linken Gebiete $\nu = \beta$ giebt umgekehrt die zweite Gleichung (55) die einfache, die erste die zusammengesetzte Focaleigenschaft der Ellipse gegen die confocale Focalhyperbel. Wenn der Punkt P, auf dem Hauptschnitte laufend, durch einen rechten Kreispunkt aus dem Gebiete $\mu = \beta$ in das rechte Gebiet $\nu = \beta$ übertritt, springt zugleich die gebrochene Focaldistanz r_0' aus der Lage $PC_0'B_0'$ in die Lage PC_0B_0' über, indem sie einen Augenblick unendlich viele Formen von gleicher Länge hat (vgl. Fig. 11, $\mu = \nu = \beta$).

Zusammenfassend haben wir das Resultat auszusprechen:

V. *Für den ersten und die auf den convexen Seiten der Focalhyperbel liegenden Stücke des zweiten Hauptschnittes geben die beiden Gleichungen* (55) *die einfache Focaleigenschaft der Ellipse; für die beiden anderen, auf den concaven Seiten der Focalhyperbel liegenden Stücke des zweiten Hauptschnittes giebt wechselweise die eine Gleichung* (55) *die einfache und die andere die zusammengesetzte Focaleigenschaft der Ellipse gegen eine confocale Hyperbel.*

Wie die Gleichungen (53), so gelten auch die Gleichungen (55) mit $\beta = \alpha$ für das erste specielle confocale System (vgl. § 5, 12'), in welchem das Ellipsoid λ als abgeplattetes Rotationsellipsoid auftritt. Sie vereinigen sich dann zu der einen Gleichung:

$$r_0 + s_0 = 2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \gamma}, \tag{55'}$$

welche mit der Bedeutung des § 19, IV' von r_0 und s_0 den Satz enthält:

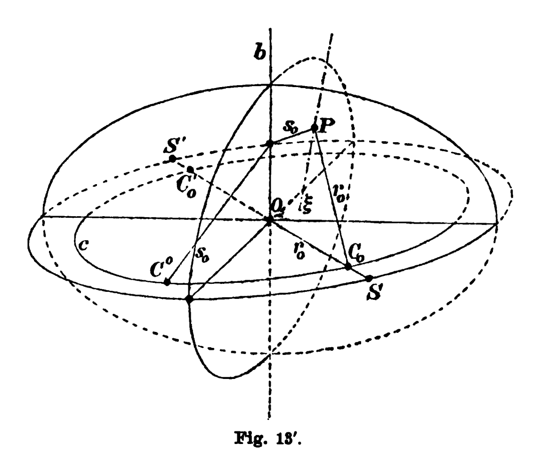


Fig. 13'.

III'. *Für jeden Punkt des abgeplatteten Rotationsellipsoides ist die Summe der beiden gebrochenen Hauptfocaldistanzen* ($r_0 + s_0$) *gleich der Hauptaxenlänge* (SS') *des Ellipsoides, vermehrt um die halbe Hauptbrennweite* ($C_0 C_0'$) *und wird der Winkel beider Distanzen von der Normale* (ξ) *des Ellipsoides halbirt* (vgl. Fig. 13').

Da das Endstück $C_0 O$ von $r_0 = PC_0 O$ gleich $\sqrt{\alpha - \gamma}$ und s_0 an Länge stets gleich der directen Entfernung PC_0' ist, so kommt diese Eigenschaft des Rotationsellipsoides auf die Focaleigenschaft eines Meridianschnittes zurück.

Mit $\beta = \gamma$ erhalten wir für das verlängerte Rotationsellipsoid des zweiten speciellen confocalen Systems (vgl. § 5, 12″) aus den beiden Gleichungen (55) die eine Gleichung:

(55″) $$r_0 + r_0' = 2\sqrt{\alpha - \lambda},$$

welche mit der Bedeutung des § 19, IV″ von r_0 und r_0' den Satz giebt:

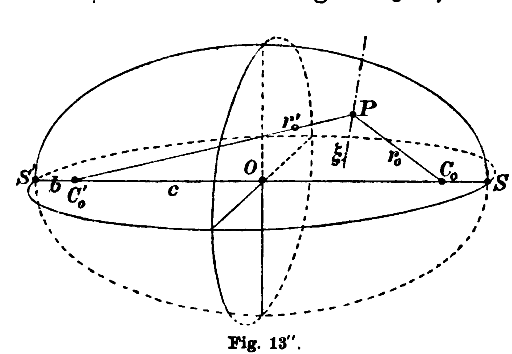


Fig. 13″.

III″. *Für jeden Punkt des verlängerten Rotationsellipsoides ist die Summe der beiden Hauptfocaldistanzen* $(r_0 + r_0')$ *gleich der Hauptaxenlänge* (SS') *des Ellipsoides und wird der Winkel beider Distanzen von der Normale* (ξ) *des Ellipsoides halbirt* (vgl. Fig. 13″).

Der Satz ist mit der Focaleigenschaft eines Meridianschnittes unmittelbar gleichbedeutend.

§ 23. Die Fadenconstruction des Ellipsoides.

Die beiden Focalkegelschnitte b und c seien von dünnem glattem Draht hergestellt und durch einen geradlinigen Verbindungsdraht $C_0 C_0'$ in der richtigen Lage zu einander erhalten. Die Ebene der Focalellipse werde horizontal, die der Focalhyperbel vertical gestellt. Für einen Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$, der oberhalb jener und vor dieser Ebene sich befinde, seien die gebrochenen Hauptfocaldistanzen $r_0' = PC_3 B_0'$ und $s_0 = PB_2 C_0$ (vgl. Fig. 15), sowie die äussere Normale $-\xi$ des Ellipsoides λ construirt. In die Lage $B_0' C_3 PB_2 C_0$ werde nun ein unausdehnbarer, vollkommen biegsamer Faden F von der Länge $2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta}$ gebracht. In den Endpunkten B_0' und C_0 sei er befestigt, an den Stellen C_3, P und B_2

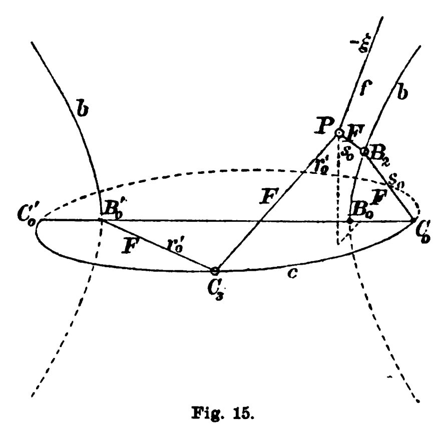


Fig. 15.

dagegen gleite er ohne Reibung durch kleine Ringe hindurch. Der Ring C_3 soll auf die vordere Hälfte der Focalellipse, der Ring B_2 auf den rechten Zweig der Focalhyperbel aufgesteckt und längs der betreffenden Curve ohne Reibung verschiebbar sein; an dem Ringe P aber sei ein anderweites Fadenstück f festgebunden, welches derart mit der Hand gespannt wird, dass es in die äussere Normale $-\xi$ des Ellipsoides λ zu liegen kommt. In der so beschriebenen Anordnung befindet sich das dreimal gebrochene, windschiefe Fadenpolygon $B_0' C_3 P B_2 C_0$ im Gleichgewicht. Denn da der Faden durch die drei Ringe C_3, P, B_2 frei gleiten kann, hat er überall gleiche Spannung (vgl. § 16). Daher wirkt der gespannte Faden auf jeden Ring mit je zwei gleichgrossen Spannungen in der Richtung der von dem Ringe fortlaufenden Fadenstücke. Die Resultante beider fällt in den Halbstrahl, welcher den Winkel dieser Fadenstücke halbirt. Die Halbirungslinie muss daher für die Ringe C_3 und B_2 in die Normalebene der Focalellipse und Focalhyperbel fallen, für den Ring P der Richtung $-\xi$ entgegengesetzt sein. Diese drei für das Gleichgewicht des Fadenpolygons nothwendigen und hinreichenden Bedingungen sind bei der vorausgesetzten Anordnung erfüllt. Die letztere beschränkt sich deshalb auf einen Punkt P im vorderen, oberen Raumquadranten, weil das geradlinige Drahtstück das Ueberschreiten der Stellen C_0 und C_0' durch den Ring C_3 und der Stelle B_0 durch den Ring B_2 verhindert. Da nun nach § 19, III für jeden Punkt P des Ellipsoides λ mit Ausnahme der beiden rechten Kreispunkte die gebrochenen Focaldistanzen r_0' und s_0 eindeutig bestimmt sind und nach § 22, 55 immer dieselbe Summe haben, so *gehört zu jedem Punkt P des Ellipsoides λ im erwähnten Raumquadranten, ausser dem rechten Kreispunkte, bei der gegebenen Anordnung eine bestimmte Gleichgewichtslage des Fadens F.*

Um die eine dieser Gleichgewichtslagen in eine benachbarte überzuführen, braucht nur die Richtung des spannenden Fadens f ein wenig verändert zu werden. Denn sobald dies in der zuerst betrachteten Gleichgewichtslage geschieht, ist die Resultante der drei auf den Ring P wirkenden Kräfte nicht mehr null und setzt sich der Ring P und mit ihm im Allgemeinen auch die beiden anderen Ringe C_3 und B_2 in Bewegung. Kommt aber das so verschobene Fadenpolygon $B_0' C_3 P B_2 C_0$ in einer neuen Lage wieder zu Ruhe, so muss es wieder in die Hauptfocaldistanzen r_0' und s_0 der neuen Stelle P fallen und dieser auf dem Ellipsoid λ liegen. Denn da nach eingetretenem Gleichgewicht die oben erwähnten drei Bedingungen erfüllt sind, so ist zuerst $B_0' C_3 P$ eine Gleichgewichtsdistanz (vgl. § 16, Anfang) der Punkte B_0' und P über die Focalellipse c und $P B_2 C_0$ eine solche über den rechten Zweig

der Focalhyperbel b. Gleichgewichtsdistanzen der letzteren Art giebt es nach § 17, I nur eine einzige, eben r_0'; von der ersteren Art kann es nach § 18, I zwei geben, von denen aber nur eine, eben s_0, ihren Gleitpunkt auf der vorderen Hälfte der Focalellipse hat. Da nun für den Punkt P die Summe $r_0' + s_0$ der gegebenen Fadenlänge $2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta}$ gleich ist, liegt er auf dem Ellipsoide λ. In Folge der dritten Gleichgewichtsbedingung endlich, die sich auf den Ring P bezieht, fällt der Faden f auch in der neuen Lage wieder in die äussere Normale $-\xi$ des Ellipsoides λ, welche der Halbirungslinie der Anfangsstücke von r_0' und s_0 entgegengesetzt ist.

Ist daher das Fadenpolygon bei der gegebenen Anordnung im Gleichgewicht, so ist sein mittlerer Eckpunkt P stets ein Punkt des Ellipsoides λ und f dessen äussere Normale.

Die Focaleigenschaft des Ellipsoides liefert daher folgende Fadenconstruction des Ellipsoides aus seinen Focalcurven:

I. *Gleitet ein in den zwei ungleichseitigen ungleichnamigen Hauptbrennpunkten B_0' und C_0 befestigter Faden* (vgl. Fig. 15) *nächst dem Endpunkte B_0' durch einen auf der Focalellipse verschiebbaren Ring C_3 und nächst dem Endpunkte C_0 durch einen auf dem rechten Focalhyperbelzweige verschiebbaren Ring B_2 und zwischen diesen beiden Gleitpunkten durch einen von einem zweiten Faden f gespannten Ring P, so beschreibt der Ring P bei fortgesetzter Richtungsänderung des spannenden Fadens f die Oberfläche eines Ellipsoides und durchläuft f dessen äussere Normalen.*

Wir könnten auch gleichzeitig einen zweiten Faden F' von derselben Länge, wie F, in den anderen Hauptbrennpunkten C_0' und B_0 befestigen, nächst dem Endpunkte C_0' durch einen Ring B_1' (vgl. Fig. 11) auf dem linken Focalhyperbelzweige und nächst dem Endpunkte B_0 durch einen (rechts von C_3) auf der vorderen Hälfte der Focalellipse laufenden Ring C_4 und zwischen beiden Punkten B_1' und C_4 durch den vorhin benutzten Ring P gleiten lassen, ohne dass dadurch die Bewegung von P eine Einschränkung erführe. Die beiden Fäden F und F' zusammen würden immer die vier Hauptfocaldistanzen (vgl. Fig. 13) des laufenden Punktes P bezeichnen.

Zurückkehrend zu Satz I, wenden wir diesen noch auf die beiden ersten Hauptebenen an. Bewegt sich P in der Ebene der Focalellipse, so bleibt der Ring B_2 (vgl. Fig. 15) an der Stelle B_0 liegen und geht der Faden F durch den Ring C_3 gestreckt hindurch (vgl. Fig. 14, P), sodass sich die Fadenconstruction der Ellipse mit den Brennpunkten B_0 und B_0' ergiebt.

Bewegt sich P in der Ebene der Focalhyperbel, etwa von dem linken Scheitelpunkte S' des Ellipsoides λ längs der oberen Hälfte des

Hauptschnittes bis zu dem rechten Kreispunkte, so liegt der Ring C_3 (vgl. Fig. 11, $\mu = \beta$) an der Stelle C_0' fest und geht der Faden F durch den Ring B_2 gestreckt hindurch (vgl. Fig. 14, $\overline{P}$). Wir haben es also mit der Fadenconstruction der Ellipse aus den Brennpunkten C_0 und C_0' zu thun. Im rechten Kreispunkte wird aber (vgl. Fig. 11, $\mu = \nu = \beta$) die bis dahin bestimmte Gleichgewichtsdistanz r_0' unendlich vieldeutig. Es muss dann, indem P in dem Kreispunkte festgehalten wird, der an der Stelle C_0' befindliche Ring C_3 über die vordere Hälfte der Focalellipse nach C_0 herumgeschoben werden, was nach § 18, [III, β, β] bei unveränderter Fadenlänge möglich ist. Von dem Kreispunkte bis zu dem anderen Scheitel S des Ellipsoides λ haben wir dann eine andere auf § 22, IV beruhende Fadenconstruction der Ellipse, bei welcher der Ring C_3 (vgl. Fig. 14, $\overline{\overline{r}}_0'$) an der Stelle C_0 festliegt und der bewegliche Theil des Fadens F das Dreieck PB_2C_0 (vgl. Fig. 14, $\overline{P}C_0 + \overline{\overline{s}}_0$) bildet. Bei dem zweiten vorhin eingeführten Faden F' würde für den betrachteten Theil des Hauptschnittes die gewöhnliche Fadenconstruction der Ellipse vorliegen.

Bei der wirklichen Ausführung der Construction an einem Drahtmodell*) ist es besser, die Ringe C_3 und B_2 wegzulassen und, indem man die Bewegung des Punktes P auf den oberen vorderen Raumquadranten beschränkt, die Gleitpunkte C_3 und B_2 dadurch an Focalellipse und Focalhyperbel zu binden, dass der Faden bei C_3 *unten* um die Focalellipse und bei B_2 *hinten* um die Focalhyperbel herumgeführt wird. Es ist dann nur bei der Construction der oberen Hälfte des zweiten Hauptschnittes auf einen Umstand zu achten: Liegt nämlich C_3 zuerst in C_0' und läuft P vom linken Scheitelpunkt S' bis zu dem rechten oberen Kreispunkt K, so haben wir nunmehr zwei Möglichkeiten, die Construction fortzusetzen. Entweder wir legen, wie vorhin bei Anwendung der Ringe C_3 und B_2, indem wir P in K festhalten, den Gleitpunkt C_3 von C_0' nach C_0 herum und lassen dann P *vor* dem rechten Hyperbelzweig nach rechts vorbeigehen, worauf der bewegliche Theil des Fadens das in Fig. 14 zu $\overline{\overline{P}}$ gehörige Dreieck bildet; oder aber, wir lassen C_3 in C_0' liegen und führen P *hinter* dem rechten Hyperbelzweig nach rechts weiter, worauf der bewegliche Theil des Fadens die beiden Geraden $C_0'P$ und PC_0 bildet. Dieses letzte Verfahren hat den Vortheil, dass es auch für das Stück KS des zweiten Hauptschnittes die gewöhnliche Fadenconstruction der Ellipse aus den Brennpunkten C_0, C_0' bietet, aber es entspricht nicht mehr

*) Das erforderliche Modell liefert die Verlagshandlung von L. Brill in Darmstadt unter Nr. 110 ihres Modellcatalogs.

der zweiten, sondern der ersten Gleichung (55) und auch dieser nur dann, wenn wir uns das fest bleibende Fadenstück $C_0' B_0'$ nach $B_0 C_0$ verlegt denken.

§ 24. Die Focaleigenschaft des einschaligen Hyperboloides.

Je zwei gebrochene Focaldistanzen eines Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$, deren Nebenwinkel (vgl. § 19, V) von der Normale η des einschaligen Hyperboloides μ halbirt wird, haben nach (52) eine von ν und λ unabhängige Differenz:

$$(56) \qquad \begin{cases} s - r = 2\sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \lambda^0} - \sqrt{\alpha - \nu^0} \\ s' - r' = 2\sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \lambda^{0'}} - \sqrt{\alpha - \nu^{0'}}. \end{cases}$$

Eine solche Differenz besitzt für zwei verschiedene Punkte λ, μ, ν immer dann und nur dann denselben Werth, wenn sie auf demselben einschaligen Hyperboloid des confocalen Systems § 4, 12 liegen, woraus, wie in § 22 an entsprechender Stelle, allgemein folgt:

I. *Für jeden Punkt eines einschaligen Hyperboloides ist die Differenz zweier gleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Focaldistanzen dieselbe und wird der Nebenwinkel beider Distanzen von der Normale des Hyperboloides halbirt.*

Mit $\lambda^0 = \lambda^{0'} = \gamma$ und $\nu^0 = \nu^{0'} = \beta$ folgen aus (56) die speciellen Gleichungen:

$$(57) \qquad \begin{cases} s_0 - r_0 = 2\sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta} \\ s_0' - r_0' = 2\sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta}, \end{cases}$$

aus denen aber mit Hilfe der Dupin'schen Focaleigenschaften die allgemeineren wieder hergeleitet werden können. Nach § 20, 49, c und b ist nämlich, wie in § 22 (vgl. Fig. 11):

$$C_4 B^0 - C_4 B_0 = \sqrt{\alpha - \lambda^0} - \sqrt{\alpha - \gamma}$$
$$B_2 C^0 - B_2 C_0 = -\sqrt{\alpha - \nu^0} + \sqrt{\alpha - \beta}$$

und darnach:

$$PB_2 C^0 - PC_4 B^0 = PB_2 C_0 - \sqrt{\alpha - \nu^0} + \sqrt{\alpha - \beta}$$
$$- PC_4 B_0 - \sqrt{\alpha - \lambda^0} + \sqrt{\alpha - \gamma}$$

oder nach (45):

$$s - r = s_0 - r_0 + \sqrt{\alpha - \gamma} + \sqrt{\alpha - \beta} - \sqrt{\alpha - \lambda^0} - \sqrt{\alpha - \nu^0},$$

woraus mit Voraussetzung der ersten Gleichung (57) die erste (56) wiederum hervorgeht. So schliessen wir allgemein:

II. *Die Eigenschaft* (56) *des einschaligen Hyperboloides ist eine Combination der Eigenschaft* (57) *mit den Dupin' schen Focaleigenschaften der Focalkegelschnitte.*

Die Focaleigenschaft des einschaligen Hyperboloides liegt also wesentlich in den Gleichungen (57), welche, da $2\sqrt{\alpha - \mu}$ die Hauptaxenlänge (vgl. § 22, bei III) ist, in Worten lautet:

III. *Für jeden Punkt des einschaligen Hyperboloides ist die Differenz zweier gleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Hauptfocaldistanzen* ($s_0 - r_0$ *oder* $s_0' - r_0'$) *gleich der Hauptaxenlänge* (SS') *des Hyperboloides, vermindert um die halbe Summe seiner beiden Hauptbrennweiten* (C_0C_0' *und* B_0B_0') *und wird der Nebenwinkel beider Distanzen von der Normale* (η) *des Hyperboloides halbirt* (vgl. Fig. 16).

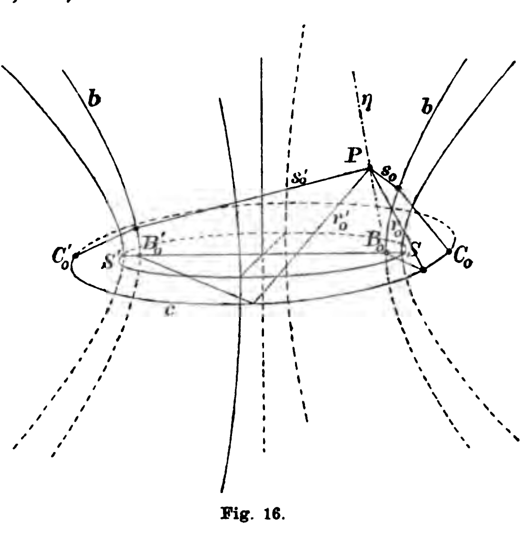


Fig. 16.

Der Hauptschnitt $z = 0$ des Hyperboloides μ (vgl. Fig. 17) ist eine Ellipse, welche die Brennpunkte B_0 und B_0' hat und innerhalb der Focalellipse c liegt (vgl. § 3). Für einen Punkt P des Hauptschnittes sind nach Fig. 11, $\lambda = \gamma$ die Gleitpunkte der gebrochenen Hauptfocaldistanzen $s_0 = PB_0C_0$, $s_0' = PB_0'C_0'$ immer in B_0 und B_0' gelegen, während r_0 und r_0' (in Fig. 17 sind nur r_0 und s_0 dargestellt) die kürzesten Entfernungen des Punktes P von B_0 und B_0' über die Focalellipse sind. Indem man daher die Grösse:

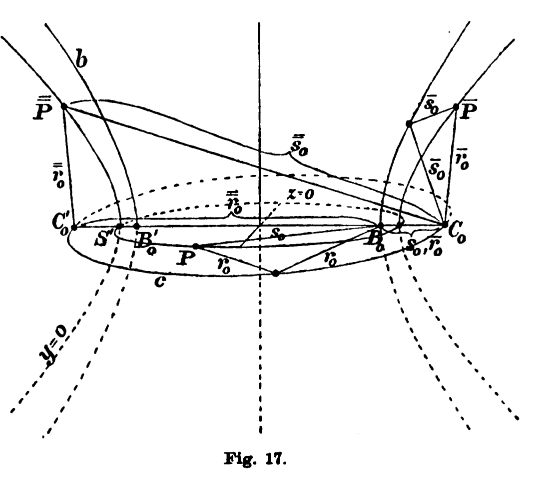


Fig. 17.

$$B_0 C_0 = B_0' C_0' = \sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta}$$

beiderseits in den Gleichungen (57) abzieht, werden diese:

$$PB_0 - r_0 = 2\sqrt{\alpha - \mu} - 2\sqrt{\alpha - \gamma}$$

$$PB_0' - r_0' = 2\sqrt{\alpha - \mu} - 2\sqrt{\alpha - \gamma}.$$

Da aber der betrachtete Hauptschnitt und die Focalellipse als zwei beliebige confocale Ellipsen, von denen diese die äussere ist, gelten können, so drücken diese Gleichungen die folgende Focaleigenschaft der Ellipse gegen eine äussere confocale Ellipse aus:

IV. *Für jeden Punkt einer Ellipse ist die Differenz der kürzesten über eine äussere confocale Ellipse genommenen und der directen Entfernung von demselben Brennpunkt gleich der Differenz der Hauptaxenlängen beider Ellipsen* (vgl. den directen Beweis Anm. I, 17, I).

Der Hauptschnitt $y = 0$ ist eine Hyperbel, welche C_0 und C_0' als Brennpunkte hat und innerhalb der Focalhyperbel liegt (vgl. Fig. 17). Die Bedeutung zunächst der ersten Gleichung (57) ist für die beiden Zweige des Hauptschnittes eine verschiedene. Denn nach Fig. 11, $\nu = \beta$ ist für einen Punkt P des rechten Zweiges (in Fig. 17 mit $\overline{P}$ bezeichnet) s_0 die kürzeste Entfernung des Punktes P vom Punkte C_0 über den rechten Zweig der Focalhyperbel, während r_0 die directe Entfernung beider Punkte als Anfangsstück und $C_0 B_0$ als unveränderliches Endstück hat. Indem daher in der ersten Gleichung (57) beiderseits die Grösse $-B_0 C_0 = -\sqrt{\alpha - \gamma} + \sqrt{\alpha - \beta}$ unterdrückt wird, giebt die Gleichung:

$$s_0 - PC_0 = 2\sqrt{\alpha - \mu} - 2\sqrt{\alpha - \beta}$$

oder in die Worte gefasst:

V. *Für jeden Punkt eines Hyperbelzweiges ist die Differenz der kürzesten über den gleichseitigen Zweig einer äusseren (auf der convexen Seite liegenden) confocalen Hyperbel genommenen und der directen Entfernung von dem gleichseitigen Brennpunkte gleich der Differenz der Hauptaxenlängen beider Hyperbeln* (vgl. den directen Beweis Anm. I, 17, II).

Für einen Punkt P des linken Zweiges des Hauptschnittes $y = 0$ (in Fig. 17 mit $\overline{\overline{P}}$ bezeichnet) ist nach Fig. 11, $\nu = \beta$ (daselbst rechte und linke Seite der yz-Ebene vertauscht gedacht) s_0 die gestreckte Entfernung PC_0 und hat r_0 die directe Entfernung PC_0' als Anfangsstück und $C_0' B_0 = \sqrt{\alpha - \gamma} + \sqrt{\alpha - \beta}$ als unveränderliches Endstück. Indem sich dieses beiderseits weghebt, wird aus der ersten Gleichung (57):

$$PC_0 - PC_0' = 2\sqrt{\alpha - \mu},$$

die gewöhnliche Focaleigenschaft der Hyperbel. Die andere Gleichung

(57) verhält sich in Bezug auf linken und rechten Zweig des Hauptschnittes gerade umgekehrt, sodass wir das Resultat aussprechen können:

VI. *Für den ersten Hauptschnitt geben die Gleichungen* (57) *beide die zusammengesetzte Focaleigenschaft der Ellipse gegen eine confocale Ellipse; für jeden der beiden Zweige des zweiten Hauptschnittes giebt wechselweise die eine Gleichung* (57) *die einfache, die andere die zusammengesetzte Focaleigenschaft der Hyperbel gegen eine confocale Hyperbel.*

Genügt der Parameter μ des betrachteten einschaligen Hyperboloides der Bedingung (vgl. § 3, nach I)

$$2\sqrt{\alpha-\mu}=\sqrt{\alpha-\gamma}+\sqrt{\alpha-\beta},$$

so reduciren sich die Gleichungen (57) auf:

$$s_0-r_0=s_0'-r_0'=0.$$

(III_0) *Für jeden Punkt des gleichseitigen einschaligen Hyperboloides ist die Differenz zweier gleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Hauptfocaldistanzen gleich null.*

Im Uebrigen ist die Differenz $s_0-r_0=s_0'-r_0'$ in (57) positiv oder negativ, jenachdem die Scheitelpunkte S, S' den äusseren oder den inneren Hauptbrennpunkten näher liegen.

Mit $\beta=\alpha$ geben die Gleichungen (57), indem sie sich zu der Gleichung:

(57′) $s_0-r_0=2\sqrt{\alpha-\mu}-\sqrt{\alpha-\gamma}$

vereinigen, mit der Bedeutung des § 19, IV′ von s_0 und r_0 den Satz:

III′. *Für jeden Punkt des einschaligen Rotationshyperboloides ist die Differenz der beiden gebrochenen Hauptfocaldistanzen* (s_0-r_0) *gleich der Hauptaxenlänge* (SS') *des Hyperboloides vermindert um die halbe Hauptbrennweite* (C_0C_0') *und wird der Nebenwinkel beider Distanzen von der Normale* (η) *des Hyperboloides halbirt* (vgl. Fig. 16′).

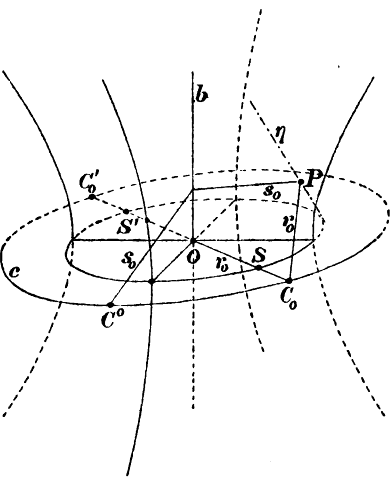


Fig. 16′.

Diese Eigenschaft kommt in der zu § 22, III′ angegebenen Weise auf die Focaleigenschaft des Meridianschnittes zurück.

Mit $\beta = \mu = \gamma$ fallen nach § 19, zu IV″, r_0 mit s_0, r_0' mit s_0' zusammen, sodass die Gleichungen (57) trivial werden, wie denn in dem zweiten speciellen confocalen System § 5, 12″ einschalige Hyperboloide nicht vorkommen.

§ 25. Die Focaleigenschaft des zweischaligen Hyperboloides.

Je zwei gebrochene Focaldistanzen eines Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$, deren Nebenwinkel (vgl. § 19, V) von der Normale ζ des zweischaligen Hyperboloides ν halbirt wird, haben nach (52) eine von λ und μ unabhängige Differenz:

$$(58)\qquad \begin{cases} r' - r = 2\sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \lambda^{0\prime}} - \sqrt{\alpha - \lambda^0} \\ s' - s = 2\sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \nu^{0\prime}} + \sqrt{\alpha - \nu^0}. \end{cases}$$

Eine solche Differenz besitzt für zwei verschiedene Punkte λ, μ, ν immer dann und im Allgemeinen nur dann denselben Werth, wenn sie auf derselben Schale desselben zweischaligen Hyperboloides in dem confocalen Systeme § 4, 12 liegen, woraus allgemein folgt:

I. *Für jeden Punkt der einen Schale eines zweischaligen Hyperboloides ist die Differenz zweier ungleichseitiger gleichnamiger gebrochener Focaldistanzen dieselbe und wird der Nebenwinkel beider Distanzen von der Normale des Hyperboloides halbirt.*

Mit $\lambda^0 = \lambda^{0\prime} = \gamma$ und $\nu^0 = \nu^{0\prime} = \beta$ folgen aus (58) die specielleren Gleichungen:

$$(59)\qquad \begin{cases} r_0' - r_0 = 2\sqrt{\alpha - \nu} \\ s_0' - s_0 = 2\sqrt{\alpha - \nu}, \end{cases}$$

aus denen aber mit Hilfe der Dupin'schen Focaleigenschaften die allgemeineren wieder hergeleitet werden können. Denn nach § 20, 49, c ist (vgl. Fig. 11):

$$C_3B^{0\prime} - C_3B_0' = \sqrt{\alpha - \lambda^{0\prime}} - \sqrt{\alpha - \gamma}$$
$$C_4B^0 - C_4B_0 = \sqrt{\alpha - \lambda^0} - \sqrt{\alpha - \gamma}$$

und hiernach:

$$PC_3B^{0\prime} - PC_4B^0 = PC_3B_0' + \sqrt{\alpha - \lambda^{0\prime}} - PC_4B_0 - \sqrt{\alpha - \lambda^0}$$

oder nach (45)

$$r' - r = r_0' - r_0 + \sqrt{\alpha - \lambda^{0\prime}} - \sqrt{\alpha - \lambda^0}.$$

Ebenso folgt aus § 20, 49, b:

$$B_1'C^{0\prime} - B_1'C_0' = -\sqrt{\alpha - \nu^{0\prime}} + \sqrt{\alpha - \beta}$$
$$B_2C^0 - B_2C_0 = -\sqrt{\alpha - \nu^0} + \sqrt{\alpha - \beta}$$
$$s' - s = s_0' - s_0 - \sqrt{\alpha - \nu^{0\prime}} + \sqrt{\alpha - \nu^0}.$$

Bei Voraussetzung der Gleichungen (59) folgen somit wieder die Gleichungen (58), sodass sich ergiebt:

II. *Die Eigenschaft* (58) *des zweischaligen Hyperboloides ist eine Combination der Eigenschaft* (59) *mit den Dupin'schen Focaleigenschaften der Focalkegelschnitte.*

Die letztere Eigenschaft aber lautet, da $2\sqrt{\alpha - \nu}$ die Hauptaxenlänge des Hyperboloides ν ist, in Worten:

III. *Für jeden Punkt des zweischaligen Hyperboloides ist die Differenz zweier ungleichseitiger gleichnamiger gebrochener Hauptfocaldistanzen* ($r_0' - r_0$ *oder* $s_0' - s_0$) *ihrem absoluten Werthe nach gleich der Hauptaxenlänge* (SS') *des Hyperboloides und wird der Nebenwinkel beider Distanzen von der Normale* (ζ) *des Hyperboloides halbirt* (vgl. Fig. 18).

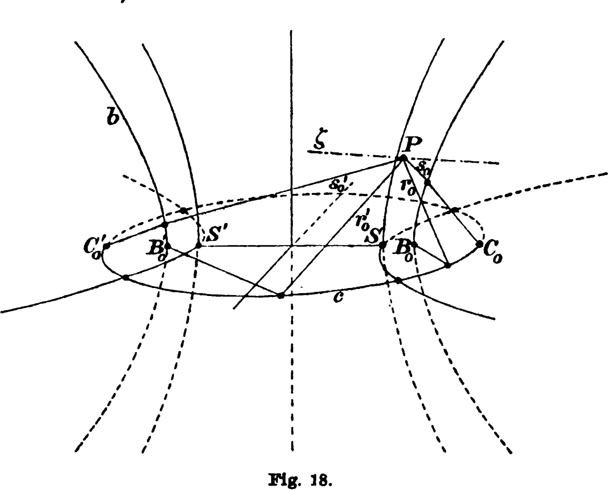


Fig. 18.

Der Hauptschnitt $z = 0$ des Hyperboloides μ ist eine Hyperbel mit den Brennpunkten B_0 und B_0', welche von der Focalellipse in den Kreispunkten geschnitten wird (vgl. Fig. 19). Für einen Punkt P des Hauptschnittes innerhalb der Focalellipse sind nun nach Fig. 11, $\lambda = \gamma$, r_0 und r_0' die kürzesten Entfernungen des Punktes von B_0 und B_0' über die Focalellipse (vgl. Fig. 19, links), sodass die erste Gleichung (59) den Satz giebt:

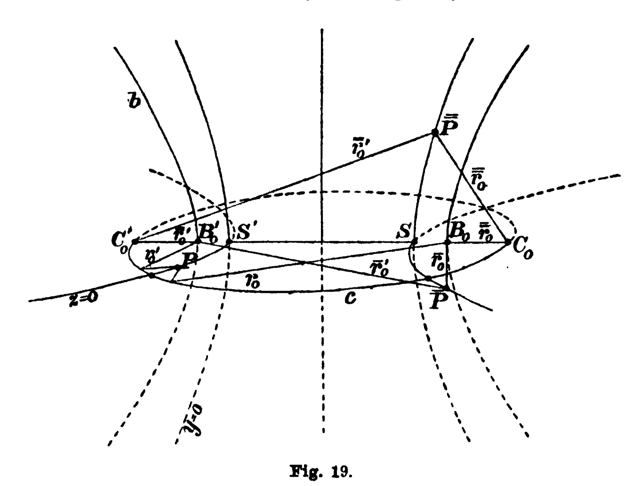


Fig. 19.

IV. *Für jeden Punkt einer Hyperbel, der im Inneren einer confocalen Ellipse liegt, ist die Differenz der kürzesten über die Ellipse genommenen Entfernungen von den beiden gemeinsamen Brennpunkten gleich der Hauptaxenlänge der Hyperbel* (vgl. den directen Beweis Anm. I, 17, IV′).

Für einen Punkt P des Hauptschnittes ausserhalb der Focalellipse (in Fig. 19 mit $\bar{P}$ bezeichnet) sind nach Fig. 11, $\mu = \gamma$, r_0 und r_0' die gestreckten Entfernungen des Punktes von B_0 und B_0', sodass die erste Gleichung (59) die gewöhnliche Focaleigenschaft:

$$PB_0' - PB_0 = 2\sqrt{\alpha - \nu}$$

der Hyperbel giebt. Dasselbe gilt von der zweiten Gleichung (59) für jede Lage von P auf dem Hauptschnitte, da nach Fig. 11, $\lambda = \gamma$ und $\mu = \gamma$ die Anfangsstücke von s_0' und s_0 (in Fig. 19 sind s_0', s_0 nicht verzeichnet) ebenfalls PB_0' und PB_0 sind, die unveränderlichen Endstücke $B_0'C_0'$ und B_0C_0 aber aus der Differenz $s_0' - s_0$ sich wegheben.

Der Hauptschnitt $y = 0$ des Hyperboloides μ ist eine Hyperbel, welche mit der Focalhyperbel b die Brennpunkte C_0, C_0' gemein hat und ihr die concave Seite zuwendet. Für jeden Punkt P des Hauptschnittes sind daher, nach Fig. 11, $\mu = \beta$, s_0 und s_0' die gestreckten Entfernungen des Punktes von C_0 und C_0' und fallen die Anfangsstücke von r_0 und r_0' mit s_0 und s_0' zusammen, während ihre unveränderlichen Endstücke C_0B_0 und $C_0'B_0'$ aus der Differenz $r_0' - r$ herausfallen. Beide Gleichungen drücken daher die gewöhnliche Focaleigenschaft

$$PC_0' - PC_0 = 2\sqrt{\alpha - \nu}$$

der Hyperbel aus.

V. *Für den ersten und zweiten Hauptschnitt geben beide Gleichungen* (59) *die einfache Focaleigenschaft der Hyperbel, mit der Ausnahme dass für die innerhalb der Focalellipse liegenden Theile des ersten Hauptschnittes die erste Gleichung* (59) *die zusammengesetzte Focaleigenschaft der Hyperbel gegen eine confocale Ellipse liefert.*

Mit $\beta = \nu = \alpha$ (vgl. § 5, 13′) fallen nach dem in § 19 zu IV′ Gesagten r_0' und r_0, s_0' und s_0 zusammen, sodass beide Gleichungen (59) trivial werden, wie denn in dem zweiten speciellen confocalen System § 5, 12′ zweischalige Hyperboloide nicht vorkommen.

Mit $\beta = \gamma$ (vgl. § 5, 13″) dagegen kommen (vgl. § 19 zu IV″) s_0 und r_0, s_0' und r_0' zum Zusammenfall, sodass beide Gleichungen (59) sich zu der einen Gleichung:

$$(59'') \qquad r_0' - r_0 = 2\sqrt{\alpha - \nu}$$

vereinigen, mit der Bedeutung § 19, IV″ von r_0 und r_0'. So ergiebt sich die mit der Focaleigenschaft der Meridianschnitte gleichbedeutende

Focaleigenschaft der zweischaligen Rotationshyperboloide v im zweiten speciellen confocalen System § 5, 12″:

III″. *Für jeden Punkt des zweischaligen Rotationshyperboloides ist die Differenz der beiden Hauptfocaldistanzen* $(r_0' - r_0)$

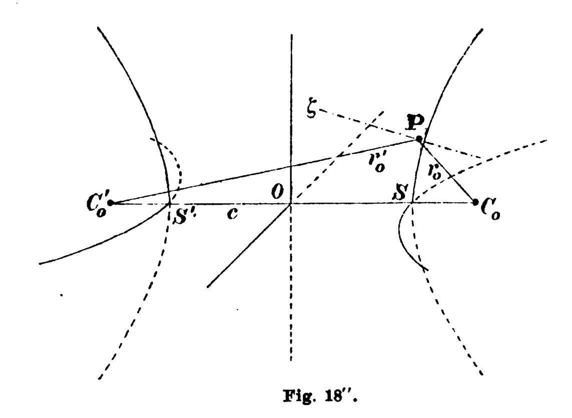


Fig. 18″.

ihrem absoluten Werthe nach gleich der Hauptaxenlänge (SS') *des Hyperboloides und wird der Nebenwinkel beider Distanzen von der Normale* (ζ) *des Hyperboloides halbirt* (vgl. Fig. 18″).

Zweiter Abschnitt.

Die Focaleigenschaften der Paraboloide.

Erstes Capitel.

Das System confocaler Paraboloide.

§ 26. Begriff der Hauptbrennpunkte, Focalparabeln und confocalen Systeme.

Bedeuten B, C willkürliche reelle Constanten, so umfasst die Gleichung:

$$(1) \qquad \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} + 2x = 0$$

alle möglichen *Paraboloide**). Der Coordinatenanfangspunkt O ist der *Scheitelpunkt*, die x-Axe, welche wir horizontal *von links nach rechts* laufend annehmen, ist die *Hauptaxe* der Flächen. Durch die Voraussetzung

$$(2) \qquad B \geqq C$$

verfügen wir über die Lage der Flächen (1) in der Weise, dass die algebraische Grössenfolge der *Parameter* B und C der Paraboloide der Reihenfolge der beiden letzten Coordinatenaxen entspricht. Wir zeichnen damit die xy-Ebene als *erste*, die xz-Ebene als *zweite Hauptebene* jeder Fläche (1) aus.

Die „*Parameter B und C der ersten und zweiten Hauptebene*" bestimmen die Brennpunkte B_0 und C_0 der Schnittcurven der einzelnen Fläche (1) mit der ersten und zweiten Hauptebene. Diese Punkte sind auf der x-Axe gelegen, haben hier die Coordinaten:

$$x = -\frac{B}{2} \quad \text{und} \quad x = -\frac{C}{2}$$

*) Vgl. Lindemann, a. § 1 a. O. S. 175.

und sollen mit Rücksicht auf die Ungleichung (2) der *linke und rechte Hauptbrennpunkt* des Paraboloides heissen. Die Entfernung beider Punkte:

$$e = \frac{B - C}{2}$$

ist die *Hauptbrennweite* des Paraboloides.

Mit den Hauptebenen und Hauptbrennpunkten sind die *Focalparabeln* einer Fläche (1) bestimmt, die *linke* c und die *rechte* b (vgl. Fig. 20):

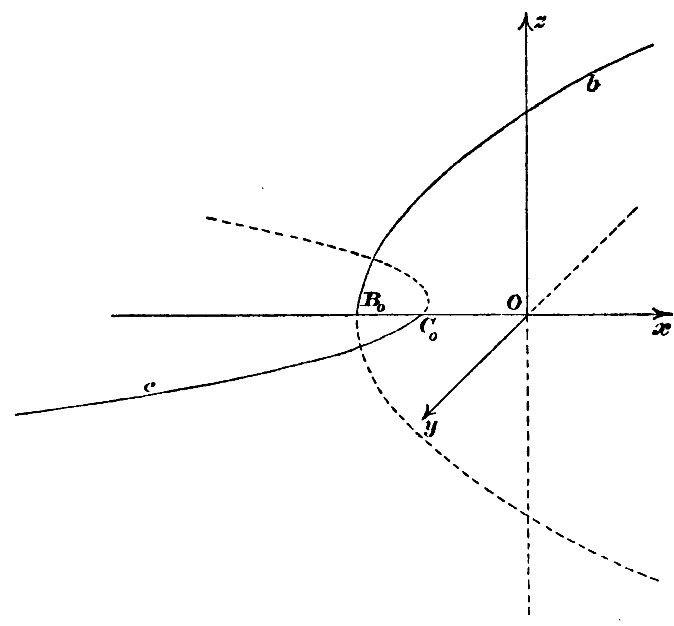


Fig. 20.

I. *Die linke Focalparabel c liegt in der ersten Hauptebene und hat den linken Hauptbrennpunkt B_0 der Fläche als Brennpunkt, den rechten C_0 als Scheitelpunkt; die rechte Focalparabel liegt in der zweiten Hauptebene und hat den rechten Hauptbrennpunkt C_0 als Brennpunkt, den linken B_0 als Scheitelpunkt.*

Die Gleichungen der beiden, übrigens congruenten *Focalparabeln c und b* lauten daher:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{B - C} + 2x + C = 0, & z = 0 \\ \dfrac{z^2}{C - B} + 2x + B = 0, & y = 0. \end{cases}$$

Jeder einzelne ihrer Punkte wird ein *Brennpunkt* oder *Focalpunkt* der Fläche (1) genannt. Die Hauptbrennpunkte sind ausgezeichnete Focalpunkte.

Durch die Werthe der Constanten B, C ist die einzelne Fläche des Systems (1) charakterisirt. Diese Fläche werde nun, unter D eine feste Constante verstanden, um die Strecke $D + \frac{B}{2}$ in der Richtung der positiven x-Axe verschoben, d. h. nach rechts oder links, jenachdem $D + \frac{B}{2}$ positiv oder negativ ist. Dadurch gelangt irgend ein Punkt, welcher der Fläche angehört oder eine feste Lage gegen sie hat, falls er sich vorher an der Stelle x, y, z befand, nunmehr an die Stelle $x + D + \frac{B}{2}$, y, z. Nach der Verschiebung ist daher die Gleichung der Fläche B, C in Bezug auf das unverändert gebliebene Coordinatensystem $Oxyz$:

$$(4) \qquad \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} + 2\left(x - D - \frac{B}{2}\right) = 0.$$

Der gesammte Inhalt der Gleichung (1) wird daher auch durch die Gleichung (4) mit fest gegebenem D und willkürlichen, nur der Bedingung (2) unterworfenen Constanten B und C dargestellt. Jedoch ist der linke Brennpunkt jeder Fläche B, C von der früheren Stelle $x = -\frac{B}{2}$ an die feste Stelle $x = -\frac{B}{2} + \left(D + \frac{B}{2}\right) = D$ verlegt.

II. *Alle Flächen des Systems* (4) *haben daher einen gemeinsamen linken Brennpunkt* $x = D$, *während der rechte Brennpunkt der einzelnen Fläche an der Stelle* $x = -\frac{C}{2} + \left(D + \frac{B}{2}\right) = D + e$ *und der Scheitelpunkt an der Stelle* $x = D + \frac{B}{2}$ *der Hauptaxe sich befinden.*

Die Gleichungen der Focalparabeln c und b lauten jetzt:

$$(5) \qquad \begin{cases} \frac{y^2}{B - C} + 2(x - D - e) = 0, & z = 0 \\ \frac{z^2}{C - B} + 2(x - D) \qquad = 0, & y = 0. \end{cases}$$

Die vorstehenden Benennungen und Definitionen sollen nicht blos für die allgemeinen, dem Ungleichheitszeichen in (2) entsprechenden Paraboloide gelten, sondern auch auf die speciellen übertragen werden, für welche $C = B$ ist und die Gleichung (4) die Form erhält:

$$(4') \qquad \frac{y^2 + z^2}{B} + 2\left(x - D - \frac{B}{2}\right) = 0,$$

in der sie alle *Rotationsparaboloide* umfasst.

Für eine Fläche (4′) wird die Hauptaxe zur *Rotationsaxe* und haben als erste und zweite Hauptebene zwei beliebige zu einander senkrechte *Meridianebenen* zu gelten. Die beiden Hauptbrennpunkte B_0 und C_0 sind in einen *einzigen Hauptbrennpunkt* $B_0 = C_0$ zusammen-

gefallen und die beiden Focalparabeln c und b haben sich, als Parabeln mit zusammenfallendem Scheitel- und Brennpunkt, auf die vom Hauptbrennpunkt nach links und rechts nach dem Unendlichen laufenden Stücke der Rotationsaxe, das *linke und rechte Focalaxenstück* zusammengezogen, welche beide in jeder Meridianebene liegen (vgl. Fig. 20').

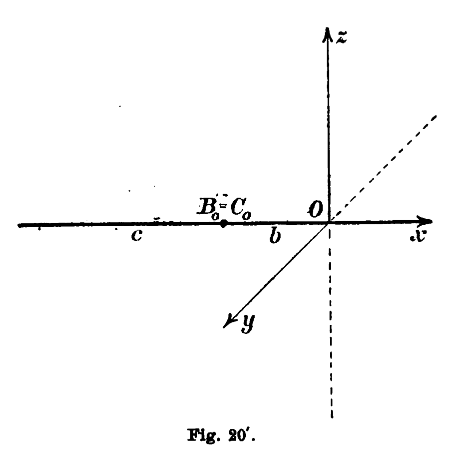


Fig. 20'.

Die Gleichung (4) stellt ein System von zweifach unendlich vielen Flächen dar. Die einzelne Fläche ist durch die besonderen Werthe der zwei der Bedingung (2) unterworfenen willkürlichen Constanten B, C oder auch der zwei willkürlichen Constanten B, e $(0 \leqq e)$ charakterisirt.

Zwei Flächen B, e und B', e' des Systems (4) heissen *confocal*, wenn $e = e'$ ist, also ihre Hauptbrennweiten gleich sind. Zwei confocale Flächen haben nach II je dieselben linken und dieselben rechten Hauptbrennpunkte, wie auch, mit Rücksicht auf die Definition I, dieselben Focalparabeln.

Die einfach unendlich vielen Flächen B', e, welche zu einer gegebenen Fläche B, e confocal sind, bilden ein *confocales System.* Jede Fläche B, e des Systems (4) gehört einem und nur einem confocalen System e an (vgl. jedoch § 27, II).

Das System (4) enthält einfach unendlich viele confocale Systeme, *allgemeine* für $e > 0$ und ein *specielles* für $e = 0$. Jedem System e ist ein Paar von Focalparabeln, das Paar der gemeinsamen Focalparabeln aller seiner Flächen, eigenthümlich.

Um die innerhalb eines confocalen Systems bewegliche Constante B gegen seine feste Constante e auch durch eine entsprechende Bezeichnung hervorzuheben, setzen wir mit gleichzeitiger Verfügung über D:

$$B = \beta - \tau, \quad B - C = \beta - \gamma, \quad D = -\frac{\beta}{2}.$$

Dadurch erhält die Gleichung (4) mit der Ungleichung (2) die Form:

$$\frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} + 2x + \tau = 0, \quad \beta \geqq \gamma$$

und stellt jetzt bei festem Werthe der Differenz $\beta - \gamma$ und veränderlichem τ alle Paraboloide eines confocalen Systems dar.

Für das *allgemeine confocale System*:

(6) $$\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}+2x+\tau=0, \quad \beta>\gamma,$$

haben jetzt die Hauptbrennpunkte B_0 und C_0 nach II die Coordinaten:

(7) $$\begin{cases} x=-\frac{\beta}{2}, & y=0, \quad z=0, \\ x=-\frac{\gamma}{2}, & y=0, \quad z=0 \end{cases}$$

und die Focalparabeln c und b (vgl. Fig. 20) nach (5) die Gleichungen:

(8) $$\begin{cases} \frac{y^2}{\beta-\gamma}+2x+\gamma=0, & z=0, \\ \frac{z^2}{\gamma-\beta}+2x+\beta=0, & y=0. \end{cases}$$

Für das *specielle confocale System:*

(6') $$\frac{y^2+z^2}{\beta-\tau}+2x+\tau=0$$

sind die Coordinaten des Hauptbrennpunktes $B_0=C_0$ (vgl. Fig. 20'):

(7') $$x=-\frac{\beta}{2}, \quad y=0, \quad z=0.$$

§ 27. Lage der Hauptbrennpunkte und Focalparabeln gegen Scheitelpunkt und Hauptschnitte.

Um für die Gleichung (6) die Werthe $\tau=\beta, \gamma$ nicht ausschliessen zu müssen, ersetzen wir sie durch die für alle übrigen Werthe von τ mit ihr gleichbedeutende Gleichung:

(9) $$(\beta-\tau)(\gamma-\tau)\left\{\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}+2x+\tau\right\}=0.$$

Dadurch werden die *Doppelebenen* $y^2=0$ und $z^2=0$, den Werthen $\tau=\beta, \gamma$ entsprechend, als *uneigentliche* Flächen des confocalen Systems in dieses eingeführt (vgl. Anm. III, 2).

Jede andere, *eigentliche* Fläche τ ist nach (9) ein linkes, d. h. links von seiner Scheiteltangentialebene $x=-\frac{\tau}{2}$ liegendes elliptisches, ein hyperbolisches oder ein rechtes, d. h. rechts von einer Scheiteltangentialebene liegendes elliptisches Paraboloid, jenachdem:

(10) $\quad -\infty<\tau<\gamma \quad$ oder $\quad \gamma<\tau<\beta \quad$ oder $\quad \beta<\tau<+\infty$,

bezüglich:

$$-\frac{\tau}{2}>-\frac{\gamma}{2} \quad \text{oder} \quad -\frac{\gamma}{2}>-\frac{\tau}{2}>-\frac{\beta}{2} \quad \text{oder} \quad -\frac{\beta}{2}>-\frac{\tau}{2}:$$

I. *Ein eigentliches Paraboloid des confocalen Systems* (9) *ist ein linkes elliptisches oder ein hyperbolisches oder ein rechtes elliptisches Paraboloid,*

jenachdem sein Scheitelpunkt auf der Hauptaxe rechts von dem rechten Hauptbrennpunkte C_0 *oder zwischen dem rechten und linken oder links von dem linken Hauptbrennpunkte* B_0 *gelegen ist* (vgl. Fig. 20).

Je zwei Flächen τ und τ' des Systems (9), für welche:

$$\tau + \tau' = \beta + \gamma$$

ist, haben die Eigenschaft, dass ihre Scheitel $x = -\frac{\tau}{2}$ und $x = -\frac{\tau'}{2}$ vom Mittelpunkte $x = -\frac{\beta+\gamma}{4}$ der beiden Hauptbrennpunkte beiderseits gleichweit entfernt sind. Die Gleichung

$$\frac{y^2}{\beta-\tau'} + \frac{z^2}{\gamma-\tau'} + 2x + \tau' = 0$$

der Fläche τ' stellt sich mit $\tau' = \beta + \gamma - \tau$ in der Form:

$$\frac{z^2}{\beta-\tau} + \frac{y^2}{\gamma-\tau} + 2\left(-x - \frac{\beta+\gamma}{2}\right) + \tau = 0$$

und bei Einführung neuer Coordinaten x', y', z' durch die Substitution:

$$x' = -x - \frac{\beta+\gamma}{2}, \quad y' = z, \quad z' = y$$

in der Form:

$$\frac{y'^2}{\beta-\tau} + \frac{z'^2}{\gamma-\tau} + 2x' + \tau = 0$$

dar. Die beiden Flächen τ und τ' sind daher congruent, wenn auch nicht congruent liegend:

II. *Jedes Paraboloid des Systems* (9) *gehört diesem System zweimal in verschiedenen Lagen an.*

Das System selbst zerfällt daher in zwei congruente, aber nicht congruent liegende Hälften. Die eine Hälfte umfasst alle linken elliptischen Paraboloide und die hyperbolischen mit $\gamma < \tau < \frac{\beta+\gamma}{2}$, die andere die hyperbolischen mit $\frac{\beta+\gamma}{2} < \tau < \beta$ und alle rechten elliptischen. Jedes Paraboloid der einen Hälfte ist einem der anderen congruent. Den Uebergang zwischen beiden Hälften vermittelt das *gleichseitige hyperbolische Paraboloid*:

$$\tau = \frac{\beta+\gamma}{2},$$

dessen Scheitelpunkt in der Mitte zwischen den beiden Hauptbrennpunkten B_0 und C_0 liegt. Für die Paraboloide der ersten Hälfte ist der Parameter $\beta - \tau$ der ersten Hauptebene (vgl. § 26), für die Paraboloide der zweiten Hälfte der Parameter $\gamma - \tau$ der zweiten Hauptebene dem *absoluten* Werthe nach der grössere oder, wie wir kurz sagen wollen:

III. *Für die Paraboloide der ersten Hälfte ist die erste, für die Paraboloide der zweiten Hälfte die zweite Hauptebene die „Hauptebene des grossen Parameters“, die je andere die „Hauptebene des kleinen Parameters“.*

Die *Schnittcurven der Flächen* (9) *mit der ersten Hauptebene* $z = 0$:

$$(9, z) \qquad (\beta - \tau)(\gamma - \tau)\left\{\frac{y^2}{\beta - \tau} + 2x + \tau\right\} = 0$$

bilden ein System confocaler Parabeln, deren gemeinsamer Brennpunkt der gemeinsame linke Hauptbrennpunkt B_0 der Flächen (9) ist (vgl. § 26, 7 u. Anm. II, 1; 2). Während nun die rechten Parabeln dieses Systems, für $\beta < \tau < +\infty$, von den rechten elliptischen Paraboloiden und seine Doppelgerade $y^2 = 0$, für $\tau = \beta$, von der gleichbezeichneten Doppelebene des Systems (9) erzeugt werden, rühren seine linken Parabeln theils, für $-\infty < \tau < \gamma$, von den linken elliptischen Paraboloiden, theils, für $\gamma < \tau < \beta$, von den hyperbolischen Paraboloiden unter (9) her (vgl. Fig. 21, wo für eine Hälfte jeder Hauptebene die Schnittcurven der linken elliptischen Paraboloide ausgezogen, der hyperbolischen gestrichelt, der rechten elliptischen punktirt dargestellt sind). Dabei bleibt unter den linken Parabeln eine Lücke, dem Werthe $\tau = \gamma$ entsprechend, für den die Gleichung (9, z) ihre Bedeutung verliert, was sich ebenso wie in § 3 erklärt. Die Gleichungen der Curve nämlich, in welcher eine beliebige Fläche τ des Systems (9) von einer ihr unendlich benachbarten geschnitten wird:

$$G(\tau) = (\gamma - \tau)y^2 + (\beta - \tau)z^2 + (\beta - \tau)(\gamma - \tau)(2x + \tau) = 0,$$
$$G'(\tau) = -y^2 - z^2 + (\beta - \tau)(\gamma - \tau) - (\beta - \tau + \gamma - \tau)(2x + \tau) = 0$$

geben, auf den Werth $\tau = \gamma$ angewendet, die Parabel

$$z^2 = 0, \quad y^2 + (\beta - \gamma)(2x + \gamma) = 0,$$

also nach § 26, 8 die linke Focalparabel c. Indem diese die Schnittcurve der Fläche $\tau = \gamma$ mit der xy-Ebene vertritt, füllt sie die erwähnte Lücke aus. Sie wird von den ersten Hauptschnitten der linken elliptischen Paraboloide umschlossen (vgl. Fig. 21) und umschliesst ihrerseits die der hyperbolischen Paraboloide. Durch den Factor $\gamma - \tau$, welcher die besondere Rolle der Focalparabel c bezeichnet, unterscheidet sich das confocale System (9, z) von dem gewöhnlichen System confocaler Parabeln (vgl. Anm. II, 1, 9°).

Die *Schnittcurven* (9) *mit der zweiten Hauptebene* $y = 0$:

$$(9, y) \qquad (\beta - \tau)(\gamma - \tau)\left\{\frac{z^2}{\gamma - \tau} + 2x + \tau\right\} = 0$$

bilden ein System confocaler Parabeln, deren gemeinsamer Brennpunkt der gemeinsame rechte Hauptbrennpunkt C_0 der Flächen (9) ist (vgl.

§ 26, 7 u. Anm. II, 1; 2). Die linken Parabeln dieses Systems, für $-\infty < \tau < \gamma$, rühren von den linken elliptischen Paraboloiden des Systems (9), seine rechten Parabeln aber theils, für $\gamma < \tau < \beta$, von

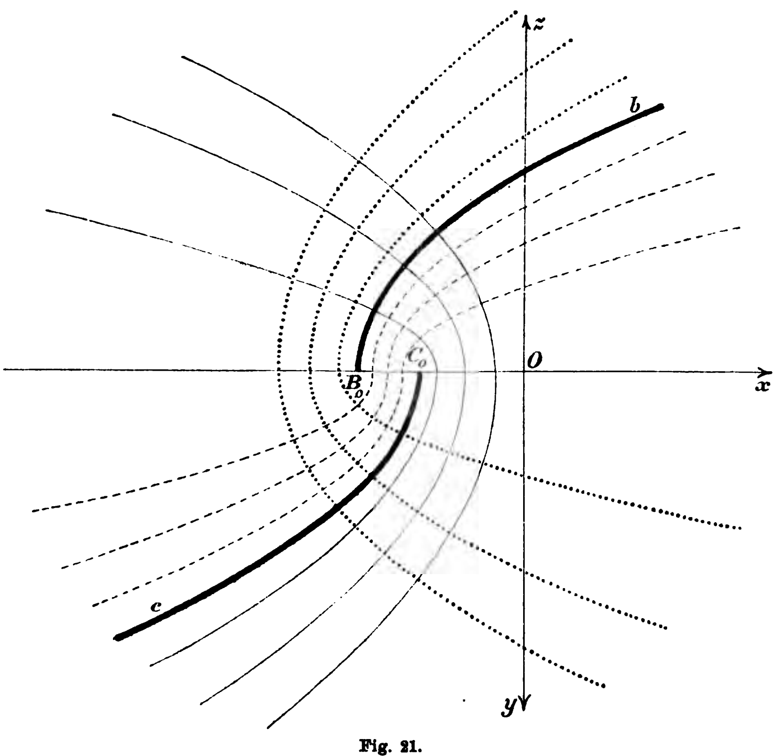


Fig. 21.

den hyperbolischen, theils, für $\beta < \tau < +\infty$, von den rechten elliptischen Paraboloiden her (vgl. Fig. 21). Ausserdem fügt sich, in demselben Sinne wie vorhin die Parabel c, jetzt die rechte Focalparabel b, dem Werthe $\tau = \beta$ entsprechend, in das System $(9, y)$ ein. Sie umschliesst die zweiten Hauptschnitte der hyperbolischen Paraboloide und wird von denen der rechten elliptischen Paraboloide umschlossen.

Während nach dem Vorstehenden bei allen eigentlichen Flächen des confocalen Systems (9) *der erste und zweite Hauptschnitt mit der linken und rechten Focalparabel bezüglich confocal sind*, ist für die Art der einzelnen Fläche die Lagebeziehung zwischen Hauptschnitt und gleichartiger (bezüglich ihrer Art als linke oder rechte Parabel) Focalparabel in ähnlicher Weise charakteristisch, wie die unter § 27, I bezeichnete Lagebeziehung zwischen Scheitelpunkt und Hauptbrennpunkten (vgl. Fig. 21):

IV. *Die linke Focalparabel liegt beim linken elliptischen Paraboloid innerhalb, beim hyperbolischen ausserhalb des gleichartigen ersten Hauptschnittes; die rechte Focalparabel liegt beim hyperbolischen Paraboloide ausserhalb, beim rechten elliptischen innerhalb des gleichartigen zweiten Hauptschnittes.*

Was die Schnittparabeln desselben Paraboloides τ mit der ersten und zweiten Hauptebene angeht, welche einen gemeinsamen Scheitel und nach $(9, z)$ und $(9, y)$ die Parameter $\beta - \tau$ und $\gamma - \tau$ haben, so ist diejenige von beiden die weiter geöffnete (vgl. Fig. 21), welche den absolut grösseren Parameter hat. Da der Parameter der Schnittparabel aber zugleich für das Paraboloid der Parameter der betreffenden Hauptebene ist, so folgt mit Rücksicht auf § 27, III:

V. *Ein Paraboloid τ des confocalen Systems* (9) *erscheint gegen die Hauptebene des grossen Parameters von beiden Seiten her zusammengedrückt.*

Gegen das elliptische Paraboloid liegen die beiden Focalparabeln wesentlich verschieden, indem die eine (vgl. Fig. 21) von dem gleichartigen Hauptschnitt ihrer Ebene umschlossen, die andere von dem ungleichartigen Hauptschnitt ihrer Ebene durchschnitten wird. Jene nennen wir *die innere,* diese *die äussere Focalparabel des elliptischen Paraboloides.* Für die linken elliptischen Paraboloide ist (vgl. Fig. 21) die linke, für die rechten die rechte Focalparabel die innere, sodass mit Hinblick auf § 27, III, unabhängig von der Zugehörigkeit des Paraboloides zu einem confocalen System, der Satz gilt:

VI. *Bei jedem elliptischen Paraboloid enthält die Hauptebene des grossen Parameters die innere, die Hauptebene des kleinen Parameters die äussere Focalparabel.*

Gegen das hyperbolische Paraboloid liegen die beiden Focalparabeln im Wesentlichen gleich, indem jede den gleichartigen Hauptschnitt ihrer Ebene umschliesst. Nur liegt in der Ebene des grossen Parameters die Focalparabel dem Hauptschnitte näher als in der Ebene des kleinen.

Indem wir auch die Gleichung (6′) des *speciellen confocalen Systems* in die der Gleichung (9) entsprechende Form:

$$(9') \qquad (\beta - \tau)\left\{\frac{y^2 + z^2}{\beta - \tau} + 2x + \tau\right\} = 0$$

versetzen, wird, für $\tau = \beta$, die Doppelaxe $y^2 + z^2 = 0$ in das System aufgenommen. Das System entsteht durch Rotation des Systems confocaler Parabeln (vgl. Anm. II, 9^0 u. Fig. 42):

$$(9_0) \qquad (\beta - \tau)\left\{\frac{y^2}{\beta - \tau} + 2x + \tau\right\} = 0$$

um die x-Axe. Der dabei fest bleibende Brennpunkt B des Systems (9_0) wird der Hauptbrennpunkt $B_0 = C_0$ (vgl. Fig. 20′) des Systems (9′). Aus den linken und rechten Parabeln des Systems (9_0) entstehen, bezüglich für:

$$(10') \qquad -\infty < \tau < \beta \quad \text{und} \quad \beta < \tau < +\infty,$$

die linken und rechten Rotationsparaboloide, welche das System (9′) bilden und deren Scheitelpunkte bezüglich rechts und links vom Hauptbrennpunkte $B_0 = C_0$ liegen (vgl. § 27, I). Jedes Rotationsparaboloid kommt einmal als linkes und einmal als rechtes vor (vgl. § 27, II). Das linke Focalaxenstück c (vgl. Fig. 20′) liegt bei den linken Rotationsparaboloiden, das rechte Focalaxenstück b bei den rechten Rotationsparaboloiden innerhalb jedes Meridianschnittes (vgl. § 27, IV).

§ 28. Die drei Flächenschaaren des confocalen Systems.

Um die verschiedenen Arten der Flächen eines confocalen Systems auch durch eine verschiedene Bezeichnung auseinander zu halten, *bezeichnen wir den Parameter τ des Systems für die linken elliptischen Paraboloide mit λ, für die hyperbolischen mit μ, für die rechten elliptischen mit ν.*

Bei dem allgemeinen confocalen System (9) ist dann nach (10) zunächst für die eigentlichen Flächen:

$$-\infty < \lambda < \gamma, \quad \gamma < \mu < \beta, \quad \beta < \nu < +\infty;$$

wir reihen aber auch die uneigentlichen Flächen $\tau = \gamma, \beta$ des Systems, durch die Focalparabeln getheilt, unter die drei Arten λ, μ, ν ein. Bewegt sich nämlich der Parameter λ des laufenden linken elliptischen Paraboloides gegen den Werth γ, so nähert sich nach der Theorie der confocalen Parabelsysteme $(9, z)$ und $(9, y)$ in § 27 (vgl. Anm. II, 2, 12°) der erste Hauptschnitt der Fläche von aussen her der linken Focalparabel und der zweite dem von C_0 nach links laufenden Stücke der x-Axe. Das linke elliptische Paraboloid zieht sich also von allen Seiten her gegen das von der linken Focalparabel c eingeschlossene (auf ihrer concaven Seite liegende) Gebiet der xy-Ebene zusammen (vgl. Fig. 22, wo unter der Bezeichnung $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ drei im Sinne des wachsenden λ aufeinanderfolgende linke elliptische Paraboloide durch ihre Hauptschnitte in einer Hälfte jeder Hauptebene dargestellt sind). Daher bildet der der Ungleichung:

$$\frac{y^2}{\beta - \gamma} + 2x + \gamma \leqq 0$$

entsprechende Theil der Doppelebene $z^2 = 0$, dessen zwei congruente von der linken Focalparabel c begrenzte Blätter wir uns etwa längs

dieser Curve miteinander verwachsen denken, die *innere Grenzform* $\lambda = \gamma$ *des laufenden linken elliptischen Paraboloides* λ im System (9).

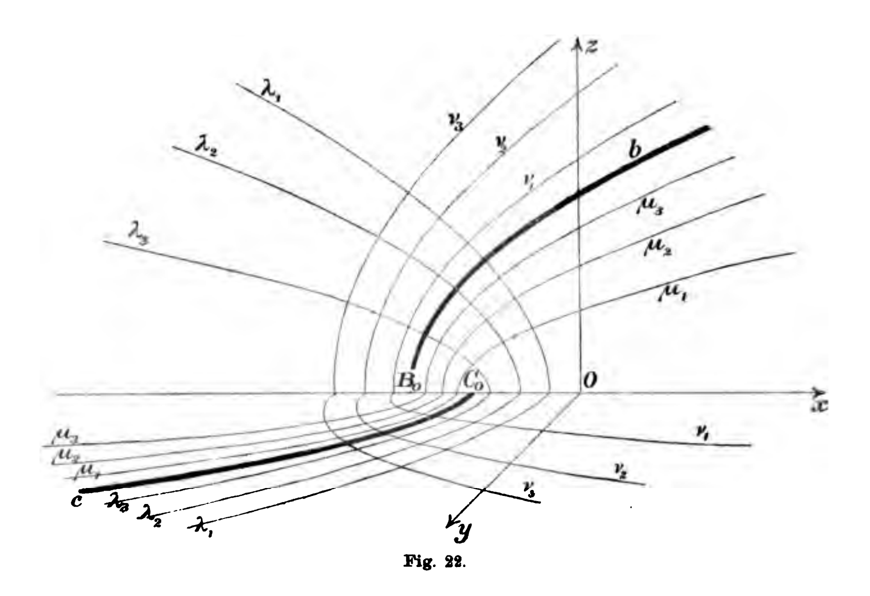


Fig. 22.

In gleichem Sinne stellt der von der linken Focalparabel ausgeschlossene, der Ungleichung:

$$\frac{y^2}{\beta-\gamma} + 2x + \gamma \geqq 0$$

entsprechende Theil der Doppelebene $z^2 = 0$ die eine *Grenzform* $\mu = \gamma$ *des laufenden hyperbolischen Paraboloides* μ dar. Denn dieses nähert sich, wenn μ gegen γ hin abnimmt, von allen Seiten her dem ausserhalb der linken Focalparabel liegenden Theile der xy-Ebene (vgl. die in Fig. 22 dargestellten hyperbolischen Paraboloide in der Reihenfolge μ_3, μ_2, μ_1). Dieselben Grenzformen wiederholen sich in anderer Lage (vgl. § 27, II) noch einmal, so zwar dass der ausserhalb der rechten Focalparabel b liegende Theil der Doppelebene $y^2 = 0$ die andere Grenzform $\mu = \beta$ des laufenden hyperbolischen Paraboloides μ (vgl. in Fig. 22: μ_1, μ_2, μ_3) und der innerhalb b liegende Theil die innere Grenzform $\nu = \beta$ der rechten elliptischen Paraboloide ν (vgl. in Fig. 22: ν_3, ν_2, ν_1) darstellt.

Hiermit ist von jeder der beiden Doppelebenen $\tau = \gamma$ und $\tau = \beta$ des Systems (9) (vgl. § 27, Anfang) der eine Theil als elliptisches, der andere als hyperbolisches Paraboloid eingeführt, und entsprechen nunmehr die Parameter der drei Flächenarten den Ungleichungen:

$$(11) \qquad -\infty \leqq \lambda \leqq \gamma, \quad \gamma \leqq \mu \leqq \beta, \quad \beta \leqq \nu \leqq +\infty.$$

Um noch die Bedeutung der Werthe $\lambda = -\infty$ und $\nu = +\infty$ festzustellen, machen wir, wie in § 4, die Gleichung (9) homogen und erhalten:

$$(9,\infty)\quad (\gamma\sigma-\tau)\sigma^2y^2+(\beta\sigma-\tau)\sigma^2z^2+(\beta\sigma-\tau)(\gamma\sigma-\tau)(2x\sigma+p\tau)p=0.$$

Aus dieser Form der Gleichung geht hervor, dass den Werthen $\tau, \sigma = \tau, 0$ der homogenen Parameter und damit dem Werthe $\tau = \pm\infty$ des nicht homogenen, die doppelte unendlich ferne Ebene, $p^2 = 0$, zugehört.

I. *Das allgemeine confocale System* (9) *zerfällt somit in drei Schaaren je gleichnamiger Flächen, deren Parameterwerthe und Gleichungen, bezüglich Ungleichungen die folgende Tabelle enthält:*

(12) *Linke elliptische Paraboloide:*

$$\lambda = -\infty:\ p^2 = 0,$$

$$-\infty < \lambda < \gamma:\ \frac{y^2}{\beta-\lambda} + \frac{z^2}{\gamma-\lambda} + 2x + \lambda = 0,$$

$$\lambda = \gamma:\ \frac{y^2}{\beta-\gamma} + 2x + \gamma \leqq 0,\ z^2 = 0.$$

Hyperbolische Paraboloide:

$$\mu = \gamma:\ \frac{y^2}{\beta-\gamma} + 2x + \gamma \geqq 0,\quad z^2 = 0,$$

$$\gamma < \mu < \beta:\ \frac{y^2}{\beta-\mu} + \frac{z^2}{\gamma-\mu} + 2x + \mu = 0,$$

$$\mu = \beta:\ \frac{z^2}{\gamma-\beta} + 2x + \beta \leqq 0,\ y^2 = 0.$$

Rechte elliptische Paraboloide:

$$\nu = \beta:\ \frac{z^2}{\gamma-\beta} + 2x + \beta \geqq 0,\quad y^2 = 0,$$

$$\beta < \nu < +\infty:\ \frac{y^2}{\beta-\nu} + \frac{z^2}{\gamma-\nu} + 2x + \nu = 0,$$

$$\nu = +\infty:\ p^2 = 0.$$

Diese Eintheilung der Flächen des confocalen Systems ist von Wichtigkeit für die Frage, welche von ihnen durch einen gegebenen Punkt x, y, z des Raumes hindurchgehen. Das hängt davon ab, wie viele von den drei Wurzeln der Gleichung (9), deren linke Seite eine ganze Function $G(\tau)$ dritten Grades in τ ist, reell sind und zwischen welchen Grenzen sie liegen.

Befindet sich der gegebene Punkt mit $y \cdot z \neq 0$ ausserhalb der beiden Hauptebenen, so ist:

$$G(-\infty) = -\infty < 0,\quad G(\gamma) = (\beta-\gamma)z^2 > 0,$$
$$G(\beta) = (\gamma-\beta)y^2 < 0,\quad G(+\infty) = +\infty > 0,$$

sodass die Gleichung (9) drei reelle Wurzeln liefert, welche zwischen den Grenzen $-\infty$ und γ, γ und β, β und $+\infty$ gelegen und daher nach (11) mit λ, μ, ν zu bezeichnen sind. Demnach geht durch den Punkt x, y, z je eine eigentliche Fläche aus jeder der drei Schaaren (12) hindurch.

Liegt der gegebene Punkt mit $z = 0$, $y \neq 0$ in der ersten Hauptebene, so hat die Gleichung (9), jetzt von der Form:

$$G(\tau) = (\gamma - \tau) G_1(\tau), \quad G_1(\tau) = (\beta - \tau) \left\{ \frac{y^2}{\beta - \tau} + 2x + \tau \right\},$$

zuerst die Wurzel $\tau = \gamma$. Ihre beiden anderen Wurzeln sind die der Gleichung $G_1(\tau) = 0$. Da nun:

$$G_1(-\infty) < 0, \quad G_1(\gamma) = (\beta - \gamma)\left\{ \frac{y^2}{\beta - \gamma} + 2x + \gamma \right\},$$
$$G_1(\beta) = y^2 > 0, \quad G_1(+\infty) < 0,$$

so befindet sich die eine der beiden letztgenannten Wurzeln jedenfalls zwischen β und $+\infty$. Die andere aber ist entweder zwischen γ und β oder $-\infty$ und γ eingeschlossen oder selbst gleich γ, jenachdem $G_1(\gamma) < 0$ oder > 0 oder $= 0$, jenachdem also nach (12) der Punkt $x, y, 0$ auf der Grenzfläche $\lambda = \gamma$ oder auf der Grenzfläche $\mu = \gamma$ oder auf der gemeinsamen Grenze beider, der linken Focalparabel liegt. Durch den Punkt gehen demnach, ausser einem eigentlichen rechten elliptischen Paraboloid ν, im ersten Falle das linke elliptische Paraboloid $\lambda = \gamma$, jener ersten Wurzel $\tau = \gamma$ der Gleichung $G(\tau) = 0$ entsprechend, und ein eigentliches hyperbolisches Paraboloid μ, im zweiten Falle ein eigentliches linkes elliptisches Paraboloid λ und, jener ersten Wurzel $\tau = \gamma$ entsprechend, das hyperbolische Paraboloid $\mu = \gamma$, im dritten Falle, der Doppelwurzel $\tau = \gamma$ der Gleichung $G(\tau) = 0$ entsprechend, das linke elliptische Paraboloid $\lambda = \gamma$ und das hyperbolische $\mu = \gamma$, auf jeden Fall je eine Fläche aus jeder der drei Schaaren (12).

In derselben Weise erledigt sich die gestellte Frage für die zweite Hauptebene $y = 0$ und für die Hauptaxe $y = 0$, $z = 0$. Um sie schliesslich für die unendlich ferne Ebene zu beantworten, müssen wir uns der Gleichung $(9, \infty)$ an Stelle von (9) bedienen. Sie liefert, als Gleichung dritten Grades in $\tau : \sigma$ bei gegebenen x, y, z, p betrachtet, für Punkte $p = 0$ zuerst die Doppelwurzel $\sigma = 0$, nicht homogen bezeichnet, $\tau = \infty$ und ferner eine Wurzel, welche der linearen Gleichung:

$$(\gamma\sigma - \tau)y^2 + (\beta\sigma - \tau)z^2 = 0$$

zu entnehmen ist. Da dieser durch $\sigma = 0$ nicht mehr genügt wird, falls nicht $y = 0$ und $z = 0$, kann sie ebensogut in nicht homogener Form:

$$(\gamma - \tau)y^2 + (\beta - \tau)z^2 = 0$$

geschrieben werden und hat dann eine Wurzel $\tau = \mu$ zwischen γ und β. Der Doppelwurzel $\tau = \infty$ entspricht zweimal die doppelte unendlich ferne Ebene $p^2 = 0$. Betrachten wir diese einmal als Grenzform $\lambda = -\infty$ der linken und einmal als Grenzform $\nu = +\infty$ der rechten elliptischen Paraboloide, so gehen durch einen gegebenen unendlich fernen Punkt wiederum drei ungleichnamige Flächen (12) hindurch. Eine Ausnahme bildet der unendlich ferne Punkt $x_{\pm\infty}$ der x-Axe: $y = 0$, $z = 0$, $p = 0$, für den die Gleichung $(9, \infty)$ identisch in $\tau : \sigma$ erfüllt ist. Durch ihn gehen alle Flächen des confocalen Systems (9), sowie seine beiden Focalparabeln (vgl. Anm. II, 2) hindurch.

II. *Durch jeden Punkt x, y, z des Raumes mit Ausnahme des unendlich fernen Punktes der x-Axe gehen drei im Sinne der Tabelle* (12) *ungleichnamige Flächen, deren Parameter λ, μ, ν die Wurzeln der in τ kubischen Gleichung* (9) *sind.*

Die der Bezeichnung nach immer verschiedenen drei Wurzeln λ, μ, ν der Gleichung (9) sind für alle Punkte ausserhalb der Focalparabeln und der unendlich fernen Ebene stets auch dem Werthe nach verschieden. Dagegen ist für alle Punkte der linken Focalparabel c: $\lambda = \mu = \gamma$, für alle Punkte der rechten Focalparabel b: $\mu = \nu = \beta$ und für alle Punkte der unendlich fernen Ebene, ausgenommen den Schnittpunkt mit der x-Axe: $\nu = \lambda = \pm\infty$. Daher sind auch die beiden Focalparabeln im Endlichen die einzigen reellen Bestandtheile der Schnittcurvenenveloppe des confocalen Systems (9).

Um das allgemeine confocale System (9) durch einen Grenzübergang, bei dem keine der drei Flächenschaaren (12) verloren geht, in das specielle überzuführen, setzen wir (vgl. § 5) mit kleinem positiven ε:

$$(13) \qquad \beta = \beta + \varepsilon\beta', \quad \gamma = \beta + \varepsilon\gamma' \ (\beta' > \gamma'), \quad \mu = \beta + \varepsilon\mu'.$$

Damit gehen die Gleichungen und Ungleichungen (12) über in:

$$-\infty < \lambda < \beta + \varepsilon\gamma': \ \frac{y^2}{\beta + \varepsilon\beta' - \lambda} + \frac{z^2}{\beta + \varepsilon\gamma' - \lambda} + 2x + \lambda = 0,$$

$$\lambda = \beta + \varepsilon\gamma': \ \frac{y^2}{\beta' - \gamma'} + \varepsilon(2x + \beta + \varepsilon\gamma') \leqq 0 \ [2x + \beta + \varepsilon\gamma' \leqq 0], z^2 = 0,$$

$$\mu' = \gamma': \ \frac{y^2}{\beta' - \gamma'} + \varepsilon\,(2x + \beta + \varepsilon\gamma') \geqq 0, \quad z^2 = 0,$$

$$\gamma'<\mu'<\beta': \frac{y^2}{\beta'-\mu'}+\frac{z^2}{\gamma'-\mu'}+\varepsilon(2x+\beta+\varepsilon\mu')=0,$$

$$\mu'=\beta': \frac{z^2}{\gamma'-\beta'}+\varepsilon(2x+\beta+\varepsilon\beta')\leqq 0, \quad y^2=0,$$

$$\nu=\beta+\varepsilon\beta': \frac{z^2}{\gamma'-\beta'}+\varepsilon(2x+\beta+\varepsilon\beta')\geqq 0[2x+\beta+\varepsilon\beta'\geqq 0], y^2=0,$$

$$\beta+\varepsilon\beta'<\nu<+\infty: \frac{y^2}{\beta+\varepsilon\beta'-\nu}+\frac{z^2}{\beta+\varepsilon\gamma'-\nu}+2x+\nu=0,$$

wo die beiden eingeklammerten Ungleichungen eine Folge der unmittelbar vorhergehenden sind. Mit $\varepsilon=0$ ergiebt sich jetzt (vgl. § 5) die folgende Grenzform der Tabelle (12):

(12′) *Linke Rotationsparaboloide:*

$$\lambda=-\infty: p^2=0,$$

$$\infty<\lambda<\beta: \frac{y^2+z^2}{\beta-\lambda}+2x+\lambda=0,$$

$$\lambda=\beta: x\leqq-\frac{\beta}{2}, \quad y^2=0, \quad z^2=0.$$

Meridianebenenpaare:

$$\mu'=\gamma': z^2=0,$$

$$\gamma'<\mu'<\beta': \frac{y^2}{\beta'-\mu'}+\frac{z^2}{\gamma'-\mu'}=0,$$

$$\mu'=\beta': y^2=0.$$

Rechte Rotationsparaboloide:

$$\nu=\beta: x\geqq-\frac{\beta}{2}, \quad y^2=0, \quad z^2=0,$$

$$\beta<\nu<+\infty: \frac{y^2+z^2}{\beta-\nu}+2x+\nu=0,$$

$$\nu=+\infty: p^2=0.$$

Die erste und dritte Flächenschaar (12′) bilden zusammen das specielle confocale System (9′), während die zweite unter die von (9′) abweichende Gleichungsform:

(14) $$(\gamma'-\mu')y^2+(\beta'-\mu')z^2=0$$

zusammengefasst werden kann. Bei dem Grenzübergang erhalten die confocalen Parabelsysteme der ersten und zweiten Hauptebene (vgl. Fig. 22) den gemeinsamen Brennpunkt $B_0=C_0$. Die beiden Focalparabeln c und b aber klappen in die beiden Focalaxenstücke c und b (vgl. Fig. 20′) zusammen, die nicht nur die inneren Grenzformen $\lambda=\beta$ und $\nu=\beta$ der Rotationsparaboloide, sondern auch die Axen aller Meridianebenenpaare μ' bilden.

Da die Rotationsparaboloide λ und ν jede Meridianebene in einem System confocaler Parabeln treffen, so folgt nach der Theorie der letzteren (vgl. Anm. II, 2) sofort:

II'. *Durch jeden Punkt x, y, z des Raumes gehen drei im Sinne der Tabelle* (12') *ungleichnamige Flächen, deren Parameter λ, ν und μ' bezüglich die Wurzeln der in τ quadratischen Gleichung* (9') *und der in μ' linearen Gleichung* (14') *sind.*

Eine Ausnahme bilden die Punkte der x-Axe, für welche μ', eine weitere der unendlich ferne Punkt der x-Axe, für welchen auch λ und ν unbestimmt werden.

Zweites Capitel.

Die parabolischen Coordinaten.

§ 29. Begriff und Arten der parabolischen Coordinaten.

Die Parameter λ, μ, ν der drei ungleichnamigen Flächen (12), welche nach § 28, II durch einen Punkt des Raumes gehen, führen, als krummlinige Coordinaten (vgl. Anm. V, 1) des Punktes benutzt, den Namen der *parabolischen Coordinaten.* Für sie folgt zugleich aus § 28, II:

I. *Jeder Punkt des Raumes mit Ausnahme des unendlich fernen Punktes der x-Axe hat drei bestimmte parabolische Coordinaten λ, μ, ν, welche bei gegebenen gewöhnlichen Coordinaten x, y, z als Wurzeln der Gleichung* (9) *hervorgehen und den Ungleichungen* (11) *genügen.*

Zwischen parabolischen und gewöhnlichen Coordinaten eines und desselben Punktes besteht daher identisch in τ die folgende Gleichung:

$$(15)\quad (\beta-\tau)(\gamma-\tau)\left\{\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}+2x+\tau\right\}=(\tau-\lambda)(\tau-\mu)(\tau-\nu).$$

Aus ihr folgen mit $\tau = \lambda,\ \mu,\ \nu$ die Relationen:

$$(16)\quad \begin{cases}(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)\left\{\frac{y^2}{\beta-\lambda}+\frac{z^2}{\gamma-\lambda}+2x+\lambda\right\}=0,\\ (\beta-\mu)(\gamma-\mu)\left\{\frac{y^2}{\beta-\mu}+\frac{z^2}{\gamma-\mu}+2x+\mu\right\}=0,\\ (\beta-\nu)(\gamma-\nu)\left\{\frac{y^2}{\beta-\nu}+\frac{z^2}{\gamma-\nu}+2x+\nu\right\}=0,\end{cases}$$

welche je nur eine parabolische Coordinate, und mit Gleichsetzung der beiderseitigen Coefficienten von τ^2, bezüglich mit Substitution der Werthe β und γ für τ, die Relationen:

$$(17)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\beta+\gamma-\lambda-\mu-\nu}{2}, \\ y^2 = -\dfrac{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)}{(\beta-\gamma)}, \\ z^2 = -\dfrac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}{(\gamma-\beta)}, \end{cases}$$

welche je nur eine gewöhnliche Coordinate enthalten.

Werden hier die parabolischen Coordinaten λ, μ, ν eines bestimmten Punktes als gegeben betrachtet, so stellen die Gleichungen (16) in laufenden Coordinaten x, y, z die drei *Coordinatenflächen* λ, μ, ν dar, welche durch den Punkt gehen, und drücken die Gleichungen (17) die gewöhnlichen Coordinaten des Punktes durch seine parabolischen aus. Dementsprechend sind *die Gleichungen* (17) *die Auflösungen der Gleichungen* (16) nach x, y^2, z^2 und durch diese bestimmt, so lange nicht $\lambda = \mu = \gamma$ oder $\mu = \nu = \beta$ wird. In diesen Ausnahmefällen müssen die beiden zusammenfallenden Gleichungen (16) durch die beiden Gleichungen (erste oder zweite Zeile 8 in § 26) derjenigen Focalparabel ersetzt werden, in welcher sich die betreffenden beiden Coordinatenflächen im Momente vor ihrem Zusammenfall schneiden (vgl. § 3 und § 27 die zu (9, z) gemachten Bemerkungen über die Schnittcurvenenveloppe).

Da die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen (17) für willkürliche den Bedingungen (11) entsprechende Werthe λ, μ, ν niemals negativ werden, so schneiden sich irgend drei ungleichnamige Flächen (12) stets in reellen, und zwar im Allgemeinen in vier Punkten:

II. *Irgend drei im Einklange mit den Ungleichungen* (11) *gegebene parabolische Coordinaten* λ, μ, ν *bestimmen vier Punkte des Raumes, deren gewöhnliche Coordinaten die Werthe haben:*

$$(18)\quad x = \frac{\beta+\gamma-\lambda-\mu-\nu}{2}, \quad y = \sqrt{-\frac{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)}{(\beta-\gamma)}},$$
$$z = \sqrt{-\frac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}{(\gamma-\beta)}}.$$

Diese vier Punkte liegen in den von den beiden Hauptebenen begrenzten Quadranten des Raumes symmetrisch vertheilt und fallen in einer Hauptebene zu je zwei, in der Hauptaxe alle vier zusammen.

In welchen Punkten des Raumes die parabolischen Coordinaten λ, μ, ν alle drei verschieden sind oder nicht, in welchen sie die speciellen Werthe γ, β haben oder nicht, geht aus den zum Satz II in § 28 angestellten Betrachtungen unmittelbar hervor. *Für einen Punkt der linken Focalparabel c ist stets $\lambda = \mu = \gamma$, für einen Punkt der rechten stets $\mu = \nu = \beta$.* Für die gewöhnlichen Coordinaten der Schnittpunkte der rechten Focalparabel b mit dem linken elliptischen Paraboloide λ ist daher nach (17):

$$x = \frac{\gamma - \beta - \lambda}{2}, \quad y^2 = 0, \quad z^2 = (\beta - \gamma)(\gamma - \lambda)$$

und der Schnittpunkte der linken Focalparabel c mit dem rechten elliptischen Paraboloide ν:

$$x = \frac{\beta - \gamma - \nu}{2}, \quad y^2 = (\beta - \gamma)(\nu - \beta), \quad z^2 = 0.$$

Diese Formeln charakterisiren aber die Kreispunkte der Flächen λ und ν *).

III. *Die rechte Focalparabel schneidet die linken, die linke Focalparabel die rechten elliptischen Paraboloide des confocalen Systems in ihren Kreispunkten.*

Dass dieser Satz bei Zugrundelegung der Definitionen des § 26 auch für das specielle confocale System (12′) gilt, ist unmittelbar ersichtlich.

Für die beiden Hauptebenen gehen die parabolischen Coordinaten des Raumes in die parabolischen Coordinaten der Ebene über (vgl. Anm. II, 3), jedoch mit einer Modification in der Bezeichnung. In der xy-Ebene nämlich hat ein Punkt innerhalb der linken Focalparabel c die räumlichen parabolischen Coordinaten γ, μ, ν, ein Punkt ausserhalb λ, γ, ν; bei jenem ist μ, bei diesem λ zugleich der Parameter der linken, bei beiden aber ν zugleich der Parameter der rechten Parabel des Systems $(9, z)$ in § 27, auf welcher der Punkt liegt (vgl. Fig. 22). Bezeichnen wir daher die durch das System $(9, z)$ beziehungsweise dessen Brennpunkt B_0 bestimmten parabolischen Coordinaten der xy-Ebene zur Unterscheidung mit $\lambda^{\cdot}, \mu^{\cdot}$ (im Sinne von Anm. II, 3), so folgt:

IV. *Hat ein Punkt der xy-Ebene die räumlichen parabolischen Coordinaten γ, μ, ν oder λ, γ, ν, so sind seine ebenen parabolischen Coordinaten $\lambda^{\cdot}, \mu^{\cdot}$ mit Bezug auf den Brennpunkt B_0: $\lambda^{\cdot} = \mu$, $\mu^{\cdot} = \nu$ oder $\lambda^{\cdot} = \lambda$, $\mu^{\cdot} = \nu$ $(-\infty \leqq \lambda^{\cdot} \leqq \beta,\ \beta \leqq \mu^{\cdot} \leqq +\infty)$.*

---

*) Die Kreispunkte des elliptischen Paraboloides: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x + a = 0$ sind unter der Voraussetzung $b^2 > c^2$:

$$x = -\frac{a + b^2 - c^2}{2}, \quad y = 0, \quad z^2 = c^2(b^2 - c^2)$$

(im Text $b^2 = \beta - \lambda$, $c^2 = \gamma - \lambda$, $a = \lambda$); die des elliptischen Paraboloides: $-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 2x + a = 0$ unter der Voraussetzung $b^2 < c^2$:

$$x = -\frac{a + b^2 - c^2}{2}, \quad y^2 = b^2(c^2 - b^2), \quad z = 0$$

(im Text $b^2 = \nu - \beta$, $c^2 = \nu - \gamma$, $a = \nu$), vgl. Lindemann, a. § 1 a. O., S. 190.

Hat ein Punkt in der xz-Ebene die räumlichen parabolischen Coordinaten λ, β, ν oder λ, μ, β, so sind seine ebenen elliptischen Coordinaten $\lambda^{\cdot\cdot}, \mu^{\cdot\cdot}$ mit Bezug auf den Brennpunkt C_0: $\lambda^{\cdot\cdot} = \lambda$, $\mu^{\cdot\cdot} = \nu$ oder $\lambda^{\cdot\cdot} = \lambda$, $\mu^{\cdot\cdot} = \mu$ $(-\infty \leqq \lambda^{\cdot\cdot} \leqq \gamma,\ \gamma \leqq \mu^{\cdot\cdot} \leqq +\infty)$.

In der Identität (15) tritt für Punkte der xy-Ebene mit $\lambda = \gamma$ oder $\mu = \gamma$ beiderseits der Factor $\gamma - \tau$ auf, welcher, da er nicht identisch in τ verschwindet, wegfallen darf. Für alle Punkte der Ebene bleibt daher zwischen x, y und $\lambda^{\cdot}$, $\mu^{\cdot}$ identisch in τ die Gleichung:

$$(\beta - \tau)\left\{\frac{y^2}{\beta - \tau} + 2x + \tau\right\} = -(\tau - \lambda^{\cdot})(\tau - \mu^{\cdot})$$

(vgl. Anm. II, 3, 15⁰). In ihr kann nun auch $\tau = \gamma$ gesetzt werden, sodass zwischen x, y und $\lambda^{\cdot}$, $\mu^{\cdot}$ die Relation besteht:

$$(15,\gamma) \qquad \frac{y^2}{\beta - \gamma} + 2x + \gamma = -\frac{(\gamma - \lambda^{\cdot})(\gamma - \mu^{\cdot})}{(\beta - \gamma)}.$$

Wie die Parameter der Flächenschaar (12), so können auch die Parameter λ, μ', ν des *speciellen confocalen Systems* (12′) als krummlinige Coordinaten dienen. An Stelle der Gleichung (15) treten dann die beiden Gleichungen:

$$(15') \qquad (\beta - \tau)\left\{\frac{y^2 + z^2}{\beta - \tau} + 2x + \tau\right\} = -(\tau - \lambda)(\tau - \nu),$$

$$(14') \qquad (\beta' - \mu')(\gamma' - \mu')\left\{\frac{y^2}{\beta' - \mu'} + \frac{z^2}{\gamma' - \mu'}\right\} = 0,$$

aus denen, ebenso wie aus (17) durch den Grenzübergang (13) in § 28, hervorgeht:

$$(17') \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\beta - \lambda - \nu}{2}, \\ y^2 = -(\beta - \lambda)(\beta - \nu) \cdot \dfrac{\beta' - \mu'}{\beta' - \gamma'}, \\ z^2 = -(\beta - \lambda)(\beta - \nu) \cdot \dfrac{\gamma' - \mu'}{\gamma' - \beta'}. \end{cases}$$

Die Coordinate μ' bestimmt das Paar von Meridianebenen (14′), in deren einer der Punkt λ, μ', ν liegt, *während λ, ν nichts anderes als die parabolischen Coordinaten des Punktes in seiner Meridianebene*, bezogen auf das confocale Parabelsystem (9_0) in § 27, sind, durch dessen Rotation um die x-Axe das System (9′) entsteht.

§ 30. Identische Relationen zwischen gewöhnlichen und parabolischen Coordinaten.

Wie in § 7 benutzen wir die Formeln (15) und (16) des § 29 der Kürze wegen in der Form:

$$(19) \qquad \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} + 2x + \tau = \frac{(\tau - \lambda)(\tau - \mu)(\tau - \nu)}{(\beta - \tau)(\gamma - \tau)},$$

$$
(20)\qquad \begin{cases}
\dfrac{y^2}{\beta-\lambda}+\dfrac{z^2}{\gamma-\lambda}+2x+\lambda=0,\\
\dfrac{y^2}{\beta-\mu}+\dfrac{z^2}{\gamma-\mu}+2x+\mu=0,\\
\dfrac{y^2}{\beta-\nu}+\dfrac{z^2}{\gamma-\nu}+2x+\nu=0,
\end{cases}
$$

indem wir auf die Anwendung für solche Werthe von λ, μ, ν, für welche die Nenner verschwinden, Verzicht leisten.

Wird nun aus der Gleichung (19) und je einer der Gleichungen (20) durch Subtraction das Glied $2x$ eliminirt, so ergeben sich mit Weglassung der nicht identisch in τ verschwindenden Factoren $\tau-\lambda$, $\tau-\mu$, $\tau-\nu$ die identischen Gleichungen:

$$
(21)\qquad \begin{cases}
\dfrac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\tau)(\gamma-\lambda)}+1=\dfrac{(\tau-\mu)(\tau-\nu)}{(\beta-\tau)(\gamma-\tau)},\\
\dfrac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\mu)}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\tau)(\gamma-\mu)}+1=\dfrac{(\tau-\nu)(\tau-\lambda)}{(\beta-\tau)(\gamma-\tau)},\\
\dfrac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\nu)}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\tau)(\gamma-\nu)}+1=\dfrac{(\tau-\lambda)(\tau-\mu)}{(\beta-\tau)(\gamma-\tau)}.
\end{cases}
$$

Ebenso gehen durch Elimination der Glieder mit y^2 und z^2 aus der Gleichung (19) und je einer Gleichung (20) zwei ähnliche Formelgruppen hervor, von denen beispielsweise die letztere lautet:

$$
(21,z)\qquad \begin{cases}
\dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)}+2x+\tau-(\gamma-\lambda)=-\dfrac{(\tau-\mu)(\tau-\nu)}{(\beta-\tau)},\\
\dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\mu)}+2x+\tau-(\gamma-\mu)=-\dfrac{(\tau-\nu)(\tau-\lambda)}{(\beta-\tau)},\\
\dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\nu)}+2x+\tau-(\gamma-\nu)=-\dfrac{(\tau-\lambda)(\tau-\mu)}{(\beta-\tau)}
\end{cases}
$$

und die erstere $(21,y)$ aus dieser durch Vertauschung von y^2 und z^2, sowie β und γ entsteht.

Aus diesen drei coordinirten Formelgruppen gehen nun weitere durch Substitution specieller Werthe von τ hervor. So folgt zuerst aus den drei Gleichungen (21), wenn beziehungsweise $\tau=\lambda, \mu, \nu$ gesetzt wird:

$$
(22)\qquad \begin{cases}
\dfrac{y^2}{(\beta-\lambda)^2}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\lambda)^2}+1=\dfrac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)},\\
\dfrac{y^2}{(\beta-\mu)^2}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\mu)^2}+1=\dfrac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)},\\
\dfrac{y^2}{(\beta-\nu)^2}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\nu)^2}+1=\dfrac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}
\end{cases}
$$

und, wenn beziehungsweise $\tau=\mu$ oder ν, ν oder λ, λ oder μ gesetzt wird:

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{(\beta-\mu)(\beta-\nu)}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}+1=0, \\ \dfrac{y^2}{(\beta-\nu)(\beta-\lambda)}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\nu)(\gamma-\lambda)}+1=0, \\ \dfrac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}+\dfrac{z^2}{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)}+1=0. \end{cases}$$

In gleicher Weise entstehen aus den drei Gleichungen $(21,z)$ die Relationen:

$$(22,z)\quad \begin{cases} \dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\lambda)^2}-2(\gamma-\lambda)+2x+\gamma=-\dfrac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(\beta-\lambda)}, \\ \dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\mu)^2}-2(\gamma-\mu)+2x+\gamma=-\dfrac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(\beta-\mu)}, \\ \dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\nu)^2}-2(\gamma-\nu)+2x+\gamma=-\dfrac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(\beta-\nu)} \end{cases}$$

und:

$$(23,z)\quad \begin{cases} \dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\mu)(\beta-\nu)}-(\gamma-\mu)-(\gamma-\nu)+2x+\gamma=0, \\ \dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\nu)(\beta-\lambda)}-(\gamma-\nu)-(\gamma-\lambda)+2x+\gamma=0, \\ \dfrac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}-(\gamma-\lambda)-(\gamma-\mu)+2x+\gamma=0. \end{cases}$$

Für die Ebene $z=0$ benutzen wir aus dem zu Anfang von § 7 angegebenen Grunde etwa von den Formeln (23) nur die erste oder zweite, jenachdem $\lambda=\gamma$ oder $\mu=\gamma$ ist, und erhalten für beide Fälle mit Anwendung der in § 29, zu IV eingeführten Bezeichnung die Relation:

$$\frac{y^2}{(\beta-\lambda^{\cdot})(\beta-\mu^{\cdot})}+1=0$$

(vgl. Anm. II, 4, 23⁰), giltig für zusammengehörige Coordinaten x, y und $\lambda^{\cdot}$, $\mu^{\cdot}$ aller Punkte der xy-Ebene. Mit $\lambda^{\cdot}=\gamma$ folgt hieraus für alle Punkte der linken Focalparabel c:

$$(23,\gamma)\qquad \frac{y^2}{(\beta-\gamma)(\beta-\nu)}+1=0.$$

§. 31. Die parabolischen Coordinaten eines Linienelementes.

Zwischen den gewöhnlichen Coordinaten x, y, z, dx, dy, dz und den parabolischen Coordinaten λ, μ, ν, $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ eines Linienelementes (vgl. Anm. V, 3) besteht, aus (15) hervorgehend, identisch in τ die folgende Gleichung:

$$(24)\qquad (\beta-\tau)(\gamma-\tau)\left\{\frac{2y\,dy}{\beta-\tau}+\frac{2z\,dz}{\gamma-\tau}+2\,dx\right\}$$
$$=-(\tau-\lambda)(\tau-\mu)(\tau-\nu)\left\{\frac{d\lambda}{\tau-\lambda}+\frac{d\mu}{\tau-\mu}+\frac{d\nu}{\tau-\nu}\right\}.$$

Aus ihr folgt mit $\tau=\lambda$, μ, ν:

$$(25)\begin{cases} -(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)\,d\lambda = 2(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)\left\{dx+\frac{y\,dy}{\beta-\lambda}+\frac{z\,dz}{\gamma-\lambda}\right\}, \\ -(\mu-\nu)(\mu-\lambda)\,d\mu = 2(\beta-\mu)(\gamma-\mu)\left\{dx+\frac{y\,dy}{\beta-\mu}+\frac{z\,dz}{\gamma-\mu}\right\}, \\ -(\nu-\lambda)(\nu-\mu)\,d\nu = 2(\beta-\nu)(\gamma-\nu)\left\{dx+\frac{y\,dy}{\beta-\nu}+\frac{z\,dz}{\gamma-\nu}\right\} \end{cases}$$

und durch Vergleichung der beiderseitigen Coefficienten von τ^2, bezüglich mit Substitution der Werthe β und γ für τ:

$$(26)\begin{cases} 2dx = -\{d\lambda + d\mu + d\nu\}, \\ 2(\gamma-\beta)y\,dy = -(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\left\{\frac{d\lambda}{\beta-\lambda}+\frac{d\mu}{\beta-\mu}+\frac{d\nu}{\beta-\nu}\right\}, \\ 2(\beta-\gamma)z\,dz = -(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\left\{\frac{d\lambda}{\gamma-\lambda}+\frac{d\mu}{\gamma-\mu}+\frac{d\nu}{\gamma-\nu}\right\}. \end{cases}$$

Die Formeln (25) drücken die drei letzten parabolischen Coordinaten des Linienelementes durch die letzten gewöhnlichen aus, wobei gleichzeitig zwischen den drei ersten Coordinaten der einen und anderen Art die Relationen (16) und (17) obwalten. Nur wenn der Anfangspunkt λ, μ, ν des Linienelementes mit $\lambda = \mu = \gamma$ oder $\mu = \nu = \beta$ auf einer Focalparabel liegt, werden $d\lambda$ und $d\mu$ oder $d\mu$ und $d\nu$ unbestimmt. Die rechte Seite der ersten Gleichung (25) ist das Differential der linken Seite der ersten Gleichung (16), woraus hervorgeht:

I. *Die Coordinate $d\lambda$ eines Linienelementes verschwindet dann und nur dann, wenn das Element in der Coordinatenfläche λ seines Anfangspunktes λ, μ, ν liegt, also einer Tangente des linken elliptischen Paraboloides λ angehört.*

Hierbei gilt als Tangente in einem Punkte γ, μ, ν der Grenzfläche $\lambda = \gamma$ (Doppelebene $z^2 = 0$) jede durch diesen Punkt gehende Gerade, wie denn in (25) $d\lambda$ mit $z = 0$, $\lambda = \gamma$ unabhängig von dx, dy, dz verschwindet. Die beiden letzten Formeln (25) erhalten mit $z = 0$, $\lambda = \gamma$ bezüglich die Factoren $\gamma - \mu$ und $\gamma - \nu$ und reduciren sich, wenn nicht zugleich $\mu = \gamma$ ist, auf:

$$(\mu-\nu)\,d\mu = 2(\beta-\mu)\left\{dx+\frac{y\,dy}{\beta-\mu}\right\},$$
$$(\nu-\mu)\,d\nu = 2(\beta-\nu)\left\{dx+\frac{y\,dy}{\beta-\nu}\right\}.$$

Die hierdurch dargestellten Differentiale $d\mu, d\nu$ sind aber die parabolischen Coordinaten $d\lambda^{\cdot}, d\mu^{\cdot}$ (vgl. § 29, IV und Anm. II, 5, 25⁰) des in der Ebene $z = 0$ liegenden Elementes x, y, dx, dy. Indem wir also voraussetzen, dass das Element $\gamma, \mu, \nu, 0, d\mu, d\nu$ in dieser Ebene liegt, was aus $\lambda = \gamma$, $d\lambda = 0$ allein noch nicht folgt, so erhalten wir mit Hinzunahme des analogen Falles $\mu = \gamma$, $d\mu = 0$ den folgenden Satz:

II. *Sind die räumlichen parabolischen Coordinaten eines in der xy-Ebene liegenden Linienelementes* $\gamma, \mu, \nu, 0, d\mu, d\nu$ oder $\lambda, \gamma, \nu, d\lambda, 0, d\nu$, *so sind seine ebenen parabolischen Coordinaten mit Bezug auf den Brennpunkt* B_0: $\lambda^{\cdot} = \mu$, $\mu^{\cdot} = \nu$, $d\lambda^{\cdot} = d\mu$, $d\mu^{\cdot} = d\nu$ oder $\lambda^{\cdot} = \lambda$, $\mu^{\cdot} = \nu$, $d\lambda^{\cdot} = d\lambda$, $d\mu^{\cdot} = d\nu$.

Ausgenommen sind von diesem Satze die Linienelemente mit $\lambda = \mu = \gamma$, da für diese $d\lambda$ und $d\mu$ unbestimmt werden, $d\lambda^{\cdot}$ aber bestimmt ist. Entsprechend verhalten sich die Elemente der xz-Ebene.

Die Formeln (26) drücken die gewöhnlichen Coordinaten dx, dy, dz durch die parabolischen Coordinaten $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ des Linienelementes aus. Nur wenn der Anfangspunkt des letzteren in die Coordinatenebenen $y = 0$ oder $z = 0$ fällt, werden bezüglich dy oder dz unbestimmt. Von diesen Ausnahmefällen abgesehen, ergeben sich aus (26) für die partiellen Differentialquotienten x_1, y_1, z_1 von x, y, z nach λ, x_2, y_2, z_2 nach μ und x_3, y_3, z_3 nach ν die Werthe (vgl. § 29, 17):

$$(27)\qquad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}, & y_1 = -\frac{y}{2(\beta-\lambda)}, \quad z_1 = -\frac{z}{2(\gamma-\lambda)}, \\ x_2 = -\frac{1}{2}, & y_2 = -\frac{y}{2(\beta-\mu)}, \quad z_2 = -\frac{z}{2(\gamma-\mu)}, \\ x_3 = -\frac{1}{2}, & y_3 = -\frac{y}{2(\beta-\nu)}, \quad z_3 = -\frac{z}{2(\gamma-\nu)}. \end{cases}$$

Hiermit nehmen die Gleichungen (23) die Form an:

$$x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = 0,$$
$$x_3x_1 + y_3y_1 + z_3z_1 = 0,$$
$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0,$$

woraus folgt (vgl. Anm. V, 5°):

III. *Die parabolischen Coordinaten sind orthogonale Coordinaten.*

Ferner ergeben sich aus den identischen Gleichungen (22) für die Ausdrücke:

$$l = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad m = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}, \quad n = \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}$$

die Darstellungen:

$$(28)\qquad l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}}, \qquad m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}},$$
$$n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}}.$$

§ 32. Die Axen eines Punktes in dem parabolischen Coordinatensystem.

Als *Axen* ξ, η, ζ *des Punktes* $P = \lambda, \mu, \nu$ *in dem parabolischen Coordinatensystem* bezeichnen wir die *positiven Tangenten der Coordi-*

natenlinien oder, was dasselbe ist, die *positiven Normalen der Coordinatenflächen* im Punkte P (vgl. Anm. V, 2). Sie haben gegen das Coordinatensystem $Oxyz$ die Richtungscosinus (vgl. Anm. V, 2, 4°):

(29)

	x	y	z
ξ	$-\frac{1}{2l}$	$-\frac{y}{2l(\beta-\lambda)}$	$-\frac{z}{2l(\gamma-\lambda)}$
η	$-\frac{1}{2m}$	$-\frac{y}{2m(\beta-\mu)}$	$-\frac{z}{2m(\gamma-\mu)}$
ζ	$-\frac{1}{2n}$	$-\frac{y}{2n(\beta-\nu)}$	$-\frac{z}{2n(\gamma-\nu)}$,

welche mit Substitution der Werthe (18) und (28) für x, y, z, l, m, n vollständig durch die parabolischen Coordinaten λ, μ, ν des Punktes P ausgedrückt zu denken sind.

Von dem Verlauf der positiven Normalen der Coordinatenflächen geht, da er sich nach der Richtung der wachsenden parabolischen Coordinaten bestimmt, aus der gestaltlichen Beschreibung des confocalen Systems in § 28 (vgl. auch Fig. 22) noch eine andere Vorstellung hervor. Da nämlich von zwei linken elliptischen Paraboloiden das mit dem grösseren λ und von zwei rechten das mit dem kleineren ν das innere (auf der concaven Seite des anderen liegende) ist, muss die *positive Normale* ξ *der linken elliptischen Paraboloide* λ *die innere*, die *positive Normale* ζ *der rechten elliptischen Paraboloide* ν *die äussere Normale* sein.

Aus den in § 9, zu Satz I angestellten Erwägungen folgt auch hier der Satz:

I. *Das Axensystem* ξ, η, ζ *eines ausserhalb der beiden Hauptebenen gelegenen Punktes* $P = \lambda, \mu, \nu$ *ist, durch die Formeln* (29), *eindeutig bestimmt. Es besteht aus den positiven Normalen der drei eigentlichen Coordinatenflächen im Punkte* P (vgl. § 28, zu II).

Ausserhalb der beiden Hauptebenen haben zugleich die Grössen (28) bestimmte endliche Werthe, sodass die Formeln des folgenden Satzes unmittelbar Anwendung finden können:

II. *Ein Linienelement mit den parabolischen Coordinaten* λ, μ, ν, $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ *hat die absolute Länge:*

$$(30)\qquad ds = \sqrt{l^2 d\lambda^2 + m^2 d\mu^2 + n^2 d\nu^2}$$

und seine Richtungscosinus p, q, r *gegen die Axen* ξ, η, ζ *des Punktes* λ, μ, ν *haben die Werthe:*

$$(31)\qquad p = \frac{l\,d\lambda}{ds}, \quad q = \frac{m\,d\mu}{ds}, \quad r = \frac{n\,d\nu}{ds}.$$

Die Charakteristik $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ *des Linienelementes* (vgl. Anm. V, 4) *ist durch die Vorzeichen von* $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ *eindeutig bestimmt.*

Nähert sich der Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ dem Gebiete $\lambda = \gamma$ oder $\mu = \gamma$ der ersten Hauptebene (vgl. § 9, zu $29, \gamma$), so erhalten die vollständig in λ, μ, ν dargestellten Richtungscosinus (29) bezüglich die folgenden Grenzwerthe:

(29,γ)

	x	y	z
ξ	0	0	∓ 1
η	$-\frac{1}{2m}$	$-\frac{y}{2m(\beta-\mu)}$	0
ζ	$-\frac{1}{2n}$	$-\frac{y}{2n(\beta-\nu)}$	0

	x	y	z
ξ	$-\frac{1}{2l}$	$-\frac{y}{2l(\beta-\lambda)}$	0
η	0	0	± 1
ζ	$-\frac{1}{2n}$	$-\frac{y}{2n(\beta-\nu)}$	0,

wo in den dritten Verticalreihen das obere oder untere Vorzeichen gilt, jenachdem die Annäherung des Punktes an die Ebene $z = 0$ von der Seite der positiven oder negativen z-Axe her geschieht. Für den Fall $\lambda = \gamma$ ist die ξ-Axe zur Ebene der Grenzform $\lambda = \gamma$ der linken elliptischen Paraboloide senkrecht, aber von unbestimmter Pfeilspitze. Dagegen fallen die η- und ζ-Axe in die xy-Ebene, stehen nach der ersten Formel (23) aufeinander senkrecht und sind zugleich die positiven Normalen der ersten Hauptschnitte der Flächen μ und ν (vgl. Anm. II, 6), die Axen des Punktes $\gamma, \mu, \nu = \lambda', \mu'$ in dem parabolischen Coordinatensystem der xy-Ebene (vgl. § 9, zu $29, \gamma$).

Gleicherweise erhalten wir aus (29) bei Annäherung des Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ an die Gebiete $\mu = \beta$ und $\nu = \beta$ der zweiten Hauptebene (vgl. Fig. 22):

(29,β)

	x	y	z
ξ	$-\frac{1}{2l}$	0	$-\frac{z}{2l(\gamma-\lambda)}$
η	0	∓ 1	0
ζ	$-\frac{1}{2n}$	0	$-\frac{z}{2n(\gamma-\nu)}$

	x	y	z
ξ	$-\frac{1}{2l}$	0	$-\frac{z}{2l(\gamma-\lambda)}$
η	$-\frac{1}{2m}$	0	$-\frac{z}{2m(\gamma-\mu)}$
ζ	0	± 1	0 ,

III. *Das Axensystem* ξ, η, ζ *eines in einer Hauptebene gelegenen Punktes* $P = \lambda, \mu, \nu$, *der kein Focalpunkt und kein Punkt der Hauptaxe ist, wird, durch die Formeln* $(29, \gamma; \beta)$, *zweideutig bestimmt. Es besteht aus den positiven Normalen der beiden eigentlichen Coordinatenflächen im Punkte* P *und der mit unbestimmter Pfeilspitze genommenen Normale der Hauptebene selbst.*

IV. *Diejenigen beiden von den drei Axen* ξ, η, ζ *eines Punktes* P *in der ersten oder zweiten Hauptebene, welche in diese Ebene fallen, sind*

zugleich die Axen $\mathfrak{x}$, η *des Punktes in dem ebenen parabolischen Coordinatensystem dieser Ebene* (vgl. § 29, IV).

Mit denselben Erläuterungen, wie in § 9, gilt ferner der Satz:

V. *Bei Benutzung der Grenzwerthe von* $ld\lambda$, $md\mu$, $nd\nu$ *behalten die Formeln* (30) *und* (31) *auch für solche Linienelemente ihre Bedeutung, deren Anfangspunkt* λ, μ, ν, *ohne Focalpunkt zu sein, in einer Hauptebene liegt. In der Charakteristik des Elementes ist das eine der drei Symbole* $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ *zweideutig oder* 0.

Tritt der Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ mit $\lambda = \mu = \gamma$ oder $\mu = \nu = \beta$ in die linke oder rechte Focalparabel ein, so bleiben von den Richtungscosinus (29) nur die der $\mathfrak{z}$- oder $\mathfrak{x}$-Axe bestimmt und werden:

$(29, \gamma, \gamma)$

	x	y	z
$\mathfrak{z}$	$-\frac{1}{2n}$	$-\frac{y}{2n(\beta-\nu)}$	0.

$(29, \beta, \beta)$

	x	y	z
$\mathfrak{x}$	$-\frac{1}{2l}$	0	$-\frac{z}{2l(\gamma-\lambda)}$.

VI. *Das Axensystem* $\mathfrak{x}$, η, $\mathfrak{z}$ *eines Punktes* $P = \lambda, \mu, \nu$ *auf der linken oder rechten Focalparabel ist unendlich vieldeutig. Es besteht aus der positiven Normale der einzigen durch den Punkt gehenden eigentlichen Coordinatenfläche, zugleich der Tangente der Focalparabel* (vgl. § 30, 23, γ), *und zwei in der Normalebene der letzteren beliebig anzunehmenden rechtwinkligen Axen.*

Im Uebrigen gelten auch hier die Schlussbemerkungen des § 9.

§ 33. Die Schnittpunkte einer geraden Linie mit dem confocalen System.

Wie in § 10 sei ϱ der Parameter des laufenden Punktes der Verbindungslinie zweier Punkte

$$P_1 = x_1, y_1, z_1 = \lambda_1, \mu_1, \nu_1 \quad \text{und} \quad P_2 = x_2, y_2, z_2 = \lambda_2, \mu_2, \nu_2.$$

Das Product der beiden äusseren Coefficienten der quadratischen Gleichung für ϱ, von welcher die Schnittpunkte der Geraden mit einer beliebigen Fläche τ des Systems (9) in § 27 abhängen, ist wie dort:

$$T = (\tau - \lambda_1)(\tau - \mu_1)(\tau - \nu_1) \cdot (\tau - \lambda_2)(\tau - \mu_2)(\tau - \nu_2).$$

Ist dieses Product negativ, so sind die Schnittpunkte der Geraden $P_1 P_2$ mit der Fläche τ reell und durch P_1 und P_2 voneinander getrennt. Dies ist wie in § 10 der Fall, wenn entweder $\tau = \lambda$, λ_1 algebraisch kleiner als jedes endliche λ, d. h. $\lambda - \lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = \gamma$ oder

$\tau = \mu$, $\mu_1 = \gamma$, $\mu_2 = \beta$ oder $\tau = \nu$, $\nu_1 = \beta$, ν_2 grösser als jedes endliche ν, d. h. $\nu - \nu_2 < 0$. Es folgt daher:

I. *Hat eine gerade Linie mit den beiden Grenzformen einer der drei Flächenschaaren* (12) *je einen Punkt P_1 und P_2 gemein, so schneidet sie jede eigentliche Fläche derselben Schaar in zwei reellen Punkten, die durch P_1 und P_2 getrennt sind.*

Hieraus aber gehen ebenso wie in § 10 die drei Sätze hervor:

II. *Schneidet eine Gerade die beiden Grenzformen $\lambda = -\infty$ und $\lambda = \gamma$ der linken elliptischen Paraboloide λ je in einem Punkte D und C, so ist für alle von D nach C gerichteten Linienelemente der beiden Abschnitte DC: $d\lambda > 0$.*

III. *Schneidet eine Gerade die beiden Grenzformen $\mu = \gamma$ und $\mu = \beta$ der hyperbolischen Paraboloide μ je in einem Punkte C und B, so ist für alle von C nach B gerichteten Elemente der beiden Abschnitte CB: $d\mu > 0$.*

IV. *Schneidet eine Gerade die beiden Grenzformen $\nu = \beta$ und $\nu = +\infty$ der rechten elliptischen Paraboloide ν je in einem Punkte B und D, so ist für alle von B nach D gerichteten Elemente der beiden Abschnitte BD: $d\nu > 0$.*

Hierbei ist indessen ein besonderes Vorkommniss hervorzuheben. Im Allgemeinen sind nämlich die beiden Punkte D und C oder C und B oder B und D, in denen eine Gerade zwei gleichnamige Grenzflächen $\lambda = -\infty$ und $\lambda = \gamma$ oder $\mu = \gamma$ und $\mu = \beta$ oder $\nu = \beta$ und $\nu = +\infty$ (vgl. § 28, 12) trifft, voneinander getrennt. Sollen sie in einen Punkt zusammenfallen, so müssen durch diesen zwei gleichnamige Flächen (12) hindurchgehen. Dies ist aber nach § 28, II nur für einen einzigen Punkt möglich, den *unendlich fernen Punkt der x-Axe; wir wollen ihn $x_{+\infty}$ oder $x_{-\infty}$ nennen, jenachdem wir ihm in der Richtung der positiven oder negativen x-Axe zustreben.* Für die durch diesen Punkt gehenden, also der Hauptaxe parallelen Geraden erfahren die Sätze II—IV eine Aenderung. Für alle Elemente einer solchen Geraden ist nach § 31, 25 mit $dy = 0$, $dz = 0$:

$$
\begin{aligned}
&-(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)d\lambda = 2(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)dx, \\
(25') \qquad &-(\mu - \nu)(\mu - \lambda)d\mu = 2(\beta - \mu)(\gamma - \mu)dx, \\
&-(\nu - \lambda)(\nu - \mu)d\nu = 2(\beta - \nu)(\gamma - \nu)dx.
\end{aligned}
$$

Liegt nun die Gerade in keiner Hauptebene, so ist auf ihr nirgends $\lambda = \mu$ oder $\mu = \nu$, nirgends auch λ oder $\mu = \gamma$, μ oder $\nu = \beta$, also für keines ihrer Elemente (im Endlichen) eine der Coordinaten $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ unbestimmt oder 0. Vielmehr folgt aus (25′) für $dx < 0$ mit Rücksicht auf die Ungleichungen (11):

V. *Für alle der positiven x-Axe entgegengesetzt (nach dem Punkte $x_{-\infty}$) gerichteten Elemente einer zur x-Axe parallelen und in keiner Hauptebene liegenden Geraden ist* $d\lambda > 0$, $d\mu > 0$, $d\nu > 0$.

Liegt die betrachtete Gerade in einer Hauptebene, so erfahren die Sätze II—V Modificationen, durch welche sie auf die entsprechenden Sätze über ebene parabolische Coordinaten zurückkommen (vgl. Anm. II, 7).

Drittes Capitel.

Focalkegel und Focallinien im confocalen System.

§ 34. Begriff und Hauptaxentransformation der Focalkegel.

Die beiden Kegel, welche von einem Punkte $P = x, y, z$ des Raumes über den beiden Focalparabeln c und b eines Systems confocaler Paraboloide errichtet sind, heissen die *Focalkegel des Punktes P*, der *linke* Focalkegel Pc und der *rechte* Focalkegel Pb.

Die Gleichungen der beiden Kegel in laufenden Coordinaten X, Y, Z ergeben sich auf demselben Wege wie in § 11 und lauten:

$$(32)\begin{cases} \dfrac{\{(Z-z)y-(Y-y)z\}^2}{\beta-\gamma} - 2(X-x)(Z-z)z + (2x+\gamma)(Z-z)^2 = 0, \\ \dfrac{\{(Y-y)z-(Z-z)y\}^2}{\gamma-\beta} - 2(X-x)(Y-y)y + (2x+\beta)(Y-y)^2 = 0. \end{cases}$$

Die erstere Gleichung (32) reducirt sich, wenn P in die Ebene $y = 0$ der rechten Focalparabel fällt, auf:

$$(32') \qquad \frac{Y^2 z^2}{\beta-\gamma} - 2(X-x)(Z-z)z + (2x+\gamma)(Z-z)^2 = 0,$$

dagegen, wenn P in die Ebene $z = 0$ der linken Focalparabel eintritt, auf:

$$(32'') \qquad \left\{\frac{y^2}{\beta-\gamma} + 2x + \gamma\right\} Z^2 = 0.$$

Liegt daher P selbst auf der linken Focalparabel (vgl. § 26, 8), so wird die Gleichung des linken Focalkegels identisch in X, Y, Z erfüllt. *Wir betrachten als Focalkegel eines solchen Punktes das Geradenbündel mit dem Centrum P.* In analoger Weise verhält sich die zweite Gleichung (32) für besondere Lagen des Punktes x, y, z.

Um die Gleichungen (32) von dem ursprünglichen Coordinatensystem $Oxyz(OXYZ)$ auf die Axen ξ, η, ζ des Punktes P zu transformiren, dienen nach § 32, 29 die Formeln:

$$(33)\quad \begin{cases} X - x = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\xi}{l} + \frac{\eta}{m} + \frac{\zeta}{n}\right\}, \\ Y - y = -\frac{y}{2}\left\{\frac{\xi}{l(\beta-\lambda)} + \frac{\eta}{m(\beta-\mu)} + \frac{\zeta}{n(\beta-\nu)}\right\}, \\ Z - z = -\frac{z}{2}\left\{\frac{\xi}{l(\gamma-\lambda)} + \frac{\eta}{m(\gamma-\mu)} + \frac{\zeta}{n(\gamma-\nu)}\right\}. \end{cases}$$

Die Substitution dieser Werthe in die erste Gleichung (32) des linken Focalkegels giebt:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}(\beta-\gamma)y^2z^2\left\{\frac{\xi}{l(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)} + \frac{\eta}{m(\beta-\mu)(\gamma-\mu)} + \frac{\zeta}{n(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}\right\}^2 \\ &-\frac{1}{2}z^2\left\{\frac{\xi}{l(\gamma-\lambda)} + \frac{\eta}{m(\gamma-\mu)} + \frac{\zeta}{n(\gamma-\nu)}\right\}\left\{\frac{\xi}{l} + \frac{\eta}{m} + \frac{\zeta}{n}\right\} \\ &+(2x+\gamma)\frac{1}{4}z^2\left\{\frac{\xi}{l(\gamma-\lambda)} + \frac{\eta}{m(\gamma-\mu)} + \frac{\zeta}{n(\gamma-\nu)}\right\}^2 = 0 \end{aligned}$$

oder nach ξ, η, ζ geordnet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}z^2\Big\{&\left[\frac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\lambda)^2} - 2(\gamma-\lambda) + 2x + \gamma\right]\frac{\xi^2}{l^2(\gamma-\lambda)^2} \\ &+\left[\frac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\mu)^2} - 2(\gamma-\mu) + 2x + \gamma\right]\frac{\eta^2}{m^2(\gamma-\mu)^2} \\ &+\left[\frac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\nu)^2} - 2(\gamma-\nu) + 2x + \gamma\right]\frac{\zeta^2}{n^2(\gamma-\nu)^2} \\ &+\left[\frac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\mu)(\beta-\nu)} - (\gamma-\mu) - (\gamma-\nu) + 2x + \gamma\right]\frac{2\eta\zeta}{mn(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)} \\ &+\left[\frac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\nu)(\beta-\lambda)} - (\gamma-\nu) - (\gamma-\lambda) + 2x + \gamma\right]\frac{2\zeta\xi}{nl(\gamma-\nu)(\gamma-\lambda)} \\ &+\left[\frac{(\beta-\gamma)y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)} - (\gamma-\lambda) - (\gamma-\mu) + 2x + \gamma\right]\frac{2\xi\eta}{lm(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)}\Big\} = 0. \end{aligned}$$

Werden jetzt die Formeln $(22, z)$, (28) und $(23, z)$ benutzt, der Werth (17) von z^2 eingesetzt und mit $-(\beta-\gamma)$ multiplicirt, so reducirt sich diese Gleichung auf:

$$(34)\quad (\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\left\{\frac{\xi^2}{\gamma-\lambda} + \frac{\eta^2}{\gamma-\mu} + \frac{\zeta^2}{\gamma-\nu}\right\} = 0.$$

Vorstehende Transformation gilt für jeden Punkt $P = x, y, z = \lambda, \mu, \nu$ ausserhalb der beiden Hauptebenen. Ist dagegen etwa $y = 0$, $\mu = \beta$, so sind die Formeln (33) nach $(29, \beta)$ durch folgende zu ersetzen:

$$\begin{aligned} X - x &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\xi}{l} + \frac{\zeta}{n}\right\} \\ Y &= \mp\eta \\ Z - z &= -\frac{z}{2}\left\{\frac{\xi}{l(\gamma-\lambda)} + \frac{\zeta}{n(\gamma-\nu)}\right\} \end{aligned}$$

und diese in die Gleichung (32') zu substituiren. Danach ergiebt sich:

$$\frac{z^2\eta^2}{\beta-\gamma}-\frac{1}{2}z^2\left\{\frac{\xi}{l(\gamma-\lambda)}+\frac{\zeta}{n(\gamma-\nu)}\right\}\left\{\frac{\xi}{l}+\frac{\zeta}{n}\right\}$$
$$+(2x+\gamma)\frac{1}{4}z^2\left\{\frac{\xi}{l(\gamma-\lambda)}+\frac{\zeta}{n(\gamma-\nu)}\right\}^2=0,$$

oder

$$\frac{1}{4}z^2\left\{\Big[-2(\gamma-\lambda)+2x+\gamma\Big]\frac{\xi^2}{l^2(\gamma-\lambda)^2}+\frac{4\eta^2}{(\beta-\gamma)}\right.$$
$$+\Big[-2(\gamma-\nu)+2x+\gamma\Big]\frac{\zeta^2}{n^2(\gamma-\nu)^2}$$
$$\left.+\Big[-(\gamma-\nu)-(\gamma-\lambda)+2x+\gamma\Big]\frac{2\zeta\xi}{nl(\gamma-\nu)(\gamma-\lambda)}\right\}=0.$$

Jetzt kommen von den Formeln (22, z), (28) und (23, z) gerade nur diejenigen in Betracht, welche $\beta-\mu$ nicht in den Nennern enthalten. Im übrigen erhalten wir wie vorhin:

$$(34')\qquad (\gamma-\lambda)(\gamma-\beta)(\gamma-\nu)\left\{\frac{\xi^2}{\gamma-\lambda}+\frac{\eta^2}{\gamma-\beta}+\frac{\zeta^2}{\gamma-\nu}\right\}=0,$$

d. h. die Gleichung (34) gilt auch für $\mu=\beta$. Ebenso wird ihre Giltigkeit für Punkte $\nu=\beta$ der xz-Ebene bewiesen. Bei der zu (34′) führenden Transformation kann nachträglich auch noch $\nu=\beta$ gesetzt werden, einem Punkte P auf der rechten Focalparabel entsprechend. Die entstehende Gleichung (34′) enthält η und ζ nur in der Verbindung $\eta^2+\zeta^2$ und ist daher für die unendlich vielen Axensysteme ξ, η, ζ des Punktes λ, β, β (vgl. § 32, VI) dieselbe.

Ist endlich P im Gebiete $\lambda=\gamma$ oder $\mu=\gamma$ der xy-Ebene gelegen, so haben wir nur in der Gleichung (32″) $Z=\mp\xi$ oder $Z=\pm\eta$ zu setzen (vgl. § 32, 29, γ) und erhalten mit Hinblick auf § 29, 15, γ:

$$(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\xi^2=0 \quad \text{oder} \quad (\gamma-\lambda)(\gamma-\nu)\eta^2=0,$$

d. h. die Gleichung (34) gilt auch für $\lambda=\gamma$ oder $\mu=\gamma$. Für $\lambda=\mu=\gamma$ wird sie, wie (32″), eine Identität.

Da analoge Entwickelungen für die zweite Gleichung (32) gelten, können wir allgemein den folgenden Satz aussprechen:

I. *Die Gleichungen des linken Focalkegels Pc und des rechten Focalkegels Pb eines beliebigen Punktes $P=\lambda, \mu, \nu$ lauten in Bezug auf die Axen ξ, η, ζ des Punktes:*

$$(34)\begin{cases}(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\left\{\frac{\xi^2}{\gamma-\lambda}+\frac{\eta^2}{\gamma-\mu}+\frac{\zeta^2}{\gamma-\nu}\right\}=0,\\(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\left\{\frac{\xi^2}{\beta-\lambda}+\frac{\eta^2}{\beta-\mu}+\frac{\zeta^2}{\beta-\nu}\right\}=0.\end{cases}$$

Hieraus folgen aber wie in § 11 die Sätze:

II. *Die beiden Focalkegel des Punktes $P=\lambda, \mu, \nu$ haben dessen Axen ξ, η, ζ als Hauptaxen.*

III. *Die beiden Focalkegel eines Punktes P, der kein Focalpunkt ist, sind stets zwei ungleichnamige Kegel eines Systems confocaler Kegel.*

IV. *Für einen Punkt P auf einer Focalparabel ist der gleichnamige Focalkegel unbestimmt (ein Geradenbündel), der ungleichnamige ein Rotationskegel mit der Tangente der Focalparabel im Punkte P als Rotationsaxe.*

Bei dem speciellen confocalen System, dessen Focalparabeln in ein linkes und rechtes Focalaxenstück c und b (vgl. Fig. 20′) ausgeartet sind, fallen die beiden Focalkegel eines ausserhalb der Rotationsaxe liegenden Punktes P in seine Meridianebene, indem jeder von ihnen zwei entgegengesetzte der vier Winkelräume bedeckt, in welche die Ebene durch die (unbegrenzten) Verbindungslinien des Punktes P mit dem Hauptbrennpunkt $B_0 = C_0$ und dem unendlich fernen Punkte der x-Axe zerlegt wird.

§ 35. Focallinien und Focalhalbstrahlen eines Punktes.

Eine gerade Linie, welche sowohl die eine als auch die andere der beiden Focalparabeln eines Systems confocaler Paraboloide schneidet, heisst eine *Focallinie* des Systems.

Durch einen Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ gehen im Allgemeinen eine begrenzte Anzahl von Focallinien, die Schnittlinien seiner beiden Focalkegel (34), zu denen jedenfalls die Verbindungslinie des Punktes mit dem gemeinsamen Punkte $x_{\pm\infty}$ der beiden Focalparabeln (vgl. § 28, vor II) gehört.

Mittels desselben Verfahrens, wie in § 12, leiten wir auch hier den Satz ab:

I. *Die Richtungscosinus p, q, r einer Focallinie des Punktes λ, μ, ν, der kein Focalpunkt ist, gegen seine Axen ξ, η, ζ sind durch die Gleichungen bestimmt:*

$$(35)\quad p^2 = \frac{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)},\quad q^2 = \frac{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)},\quad r^2 = \frac{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}.$$

Aus ihm folgt mit Benutzung der eben über den Punkt $x_{\pm\infty}$ gemachten Bemerkung zuerst:

II. *Durch jeden Punkt ausserhalb der beiden Hauptebenen gehen vier getrennte Focallinien, von denen eine der Hauptaxe parallel ist;*
und dann wie in § 12 weiter:

III. *Durch jeden Punkt in einer Hauptebene, der nicht Focalpunkt ist, gehen zwei Focallinien, die Focallinien des Punktes in dem confocalen Parabelsysteme (9, z) oder (9, y) der betreffenden Ebene* (vgl. Anm. II, 8).

Unmittelbar aus der Definition der Focallinien folgt endlich:

IV. *Durch jeden Punkt einer Focalparabel gehen einfach unendlich viele Focallinien, die Erzeugenden des Rotationskegels von dem Punkte über der anderen Focalparabel. Durch den gemeinsamen unendlich fernen Punkt der beiden Focalparabeln gehen zweifach unendlich viele Focallinien, die Parallelen zur Hauptaxe.*

Bei dem speciellen confocalen System (9′) (vgl. Fig. 20′) sind die Focallinien eines Punktes P ausserhalb der Rotationsaxe die, den beiden Focalkegeln gemeinsamen, Verbindungslinien des Punktes mit dem Hauptbrennpunkte $B_0 = C_0$ und dem unendlich fernen Punkte der Rotationsaxe. Diese sind aber zugleich die Focallinien, welche dem Punkte P in dem confocalen Parabelsystem § 27, 9_0 seiner Meridianebene zukommen, sodass zu ihrer analytischen Bestimmung auf die Ebene verwiesen werden kann (vgl. Anm. II, 8).

Indem wir uns zu dem allgemeinen confocalen System zurückwenden, folgern wir unter Benutzung der in § 13 eingeführten Terminologie auch hier:

V. *Die Richtungscosinus eines Focalhalbstrahles des Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ gegen die Axen ξ, η, ζ des letzteren sind:*

$$(36)\quad p = \mathfrak{l}\sqrt{\frac{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}},\quad q = \mathfrak{m}\sqrt{\frac{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}},\quad r = \mathfrak{n}\sqrt{\frac{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}},$$

wo $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ *die Charakteristik des Focalhalbstrahles im Punkte P ist.*

Wenn wir ferner die acht Focalhalbstrahlen eines Punktes wiederum, wie in § 13, mit:

$$(37)\quad \begin{cases} +f_1 = (+++) & +f_2 = (++-) \\ -f_1 = (---) & -f_2 = (--+) \\ +f_3 = (+-+) & +f_4 = (+--) \\ -f_3 = (-+-) & -f_4 = (-++) \end{cases}$$

bezeichnen, so ergiebt sich für sie dieselbe Anordnung gegen Axen und Ebenen des Coordinatensystems $P\xi\eta\zeta$, wie sie dort in (38) und (39) dargestellt ist. Die yz-Ebene spielt hier keine besondere Rolle, wie es dort der Fall war; dagegen bleibt das dort zu (40) Bemerkte für den Eintritt des Punktes P in eine der Grenzflächen $\lambda = \gamma$, $\mu = \gamma$, $\mu = \beta$, $\nu = \beta$ auch jetzt in Kraft. Insbesondere gilt der Satz:

VI. *Wird das Symbol 0 in der Charakteristik eines Focalhalbstrahles eines Punktes der ersten oder zweiten Hauptebene im confocalen System der Paraboloide weggelassen, so geht die Charakteristik in diejenige über, welche der Focalhalbstrahl in dem confocalen Parabelsystem* (9, z) *oder* (9, y) *dieser Ebene hat* (vgl. Anm. II, 9).

§ 36. Das Focallinienelement und die Aenderung seiner Charakteristik längs einer Focallinie.

Die Charakteristik $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ eines Focalhalbstrahles im Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ ist (vgl. § 14) zugleich diejenige seines Anfangselementes.

Aus (37) folgt daher mit Rücksicht auf § 33, V und die Anfangsbemerkungen von § 35 zuerst:

I. *Die Focalhalbstrahlen* $+ f_1$ *und* $- f_1$ *haben bezüglich die Richtung der negativen und positiven x-Axe (laufen bezüglich von P nach den Punkten* $x_{-\infty}$ *und* $x_{+\infty}$).

Und dann wie in § 14:

I. *Zwischen den parabolischen Coordinaten* $\lambda, \mu, \nu, d\lambda, d\mu, d\nu$ *und der absoluten Länge ds eines Focallinienelementes von der Charakteristik* $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ *bestehen die Relationen:*

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{l\,d\lambda}{ds} = \mathfrak{l}\sqrt{\dfrac{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}}, \quad \dfrac{m\,d\mu}{ds} = \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}}, \\ \dfrac{n\,d\nu}{ds} = \mathfrak{n}\sqrt{\dfrac{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}}. \end{cases}$$

Unter Benutzung der Werthe (28) von l, m, n nehmen diese Formeln für einen Punkt λ, μ, ν ausserhalb der beiden Hauptebenen die Form an:

$$\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}\frac{\mathfrak{l}\,d\lambda}{2} = ds, \quad \frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}\frac{\mathfrak{m}\,d\mu}{2} = ds,$$
$$\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}\frac{\mathfrak{n}\,d\nu}{2} = ds.$$

Werden sie nun bezüglich mit den Factoren:

$(\mu-\nu)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)$, $(\nu-\lambda)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)$, $(\lambda-\mu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)$,

deren Summe $= -(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)$ ist, multiplicirt und addirt, so folgt:

$$(42)\qquad ds = \frac{1}{2}(\mathfrak{l}\,d\lambda + \mathfrak{m}\,d\mu + \mathfrak{n}\,d\nu).$$

III. *Die absolute Länge ds eines Focallinienelementes mit den parabolischen Coordinaten* $\lambda, \mu, \nu, d\lambda, d\mu, d\nu$ *und der Charakteristik* $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ *hat den Werth* (42).

Die auch für die beiden Hauptebenen giltige Formel (vgl. § 14) geht unter der Annahme $\mathfrak{l} = \mathfrak{m} = \mathfrak{n} = -\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$, für welche nach I: $ds = \varepsilon dx$ ist, in die erste Formel § 31, 26 über.

Eine nicht in der Ebene einer Focalparabel gelegene Focallinie schneidet jede der beiden Focalparabeln b und c in einem einzigen Punkte B und C, zugleich ihrem Schnittpunkte mit der Ebene $y = 0$

und $z = 0$. Ist der eine der beiden Punkte B und C, etwa B, unendlich fern, also der unendlich ferne Punkt der x-Axe, so liegt, da C in der xy-Ebene liegt, die ganze Focallinie in der xy-Ebene, es sei denn, dass auch C mit B zusammenfällt. Es giebt daher zwei Typen von Focallinien, die nicht ganz in einer der beiden Hauptebenen liegen: bei dem einen Typus sind B und C voneinander und je vom unendlich fernen Punkte D der Focallinie getrennt, die Focallinie des anderen Typus ist der Hauptaxe parallel und ihre drei Punkte B, C, D fallen zusammen.

Was die Focallinien des ersten Typus betrifft, so ist nach § 33, II—IV längs der beiden Abschnitte von D nach C beständig $d\lambda > 0$, längs der beiden von C nach B $d\mu > 0$ und längs der beiden von B nach D $d\nu > 0$. Für den zweiten Typus ist nach § 33, V von $x_{+\infty}$ bis $x_{-\infty}$ beständig $d\lambda > 0$, $d\mu > 0$, $d\nu > 0$. Es gelten daher für die beiden Typen die in der folgenden schematischen Darstellung angegebenen Charakteristiken, jede in der durch den beigesetzten Pfeil bezeichneten Richtung:

$$(43)\quad \begin{cases} \overset{D}{\bullet} \cdots \overset{++-}{\underset{--+}{\longleftrightarrow}} \cdots \overset{B}{\bullet} \cdots \overset{+-+}{\underset{-+-}{\longleftrightarrow}} \cdots \overset{C}{\bullet} \cdots \overset{-++}{\underset{+--}{\longleftrightarrow}} \cdots \overset{D}{\bullet} \\ D = B = C \bullet \cdots\cdots \overset{---}{\underset{+++}{\longleftrightarrow}} \cdots\cdots \bullet\, C = B = D \end{cases}$$

Für die in der xy- oder xz-Ebene verlaufenden Focallinien gilt dieses Schema deshalb nicht mehr, weil sie zwei Punkte C oder zwei Punkte B enthalten, ihre Schnittpunkte mit der Focalparabel der betreffenden Ebene. Eine Focallinie der xy-Ebene ist nach § 35, III zugleich Focallinie in dem confocalen Parabelsystem $(9, z)$ mit dem Brennpunkte B_0 und hat in diesem, wenn sie nicht der x-Axe parallel ist, die Charakteristiken (vgl. Anm. II, 10):

$$(43_0)\quad \overset{D}{\bullet} \cdots\cdots \overset{+-}{\underset{-+}{\longleftrightarrow}} \cdots\cdots \overset{B_0}{\bullet} \cdots\cdots \overset{-+}{\underset{+-}{\longleftrightarrow}} \cdots\cdots \overset{D}{\bullet}$$

Ihre Schnittpunkte C mit der linken Focalparabel c, welche eine eigentliche Parabel des Systems $(9, z)$ ist, liegen nach Anm. II, 7, I durch die Punkte B_0 und D getrennt. Es ergeben sich also aus (43_0) die Charakteristiken der einzelnen Abschnitte im Raume, wie in § 14:

$$(43')\quad \overset{D}{\bullet} \cdot \overset{+0-}{\underset{-0+}{\longleftrightarrow}} \cdot \overset{C}{\bullet} \cdot \overset{0+-}{\underset{0-+}{\longleftrightarrow}} \cdot \overset{B_0}{\bullet} \cdot \overset{0-+}{\underset{0+-}{\longleftrightarrow}} \cdot \overset{C}{\bullet} \cdot \overset{-0+}{\underset{+0-}{\longleftrightarrow}} \cdot \overset{D}{\bullet}$$

und entsprechend für die übrigen bei (43) ausgeschlossenen Fälle.

§ 37. Die Schnittpunkte der Focallinien eines Punktes mit den Focalparabeln.

Die Schnittpunkte einer Focallinie f_i (vgl. § 35, 37) eines Punktes P, der in keiner der Ebenen $y = 0$, $z = 0$, noch auch in der unendlich fernen Ebene liegt, mit den drei genannten Ebenen seien B_i, C_i, D_i. Die Charakteristiken der positiven Focalhalbstrahlen $+f_i$ im Punkte P:

$$+f_1=(+++), \quad +f_2=(++-), \quad +f_3=(+-+), \quad +f_4=(+--)$$

sind zugleich die Charakteristiken der Anfangselemente der Focalhalbstrahlen. Diese Anfangselemente müssen daher nach (43) beziehungsweise einer Focallinie des zweiten Typus oder dem ersten, zweiten oder dritten Abschnitte einer Focallinie des ersten Typus angehören. Hieraus folgt für die Focallinie f_1 wiederum der bereits § 36, I angeführte Satz und für die drei anderen in der Bezeichnung wie § 15, 44:

Die Reihenfolge der Punkte P, B_i, C_i auf den drei Focallinien f_i $(i = 2, 3, 4)$ des Punktes P, in der Richtung der positiven Focalhalbstrahlen $+f_i$, ist die folgende:

$$(44) \qquad f_2 = PB_2C_2, \quad f_3 = B_3PC_3, \quad f_4 = PC_4B_4.$$

Dies kann aber auch in folgenden Sätzen formulirt werden:

I. *Der Focalhalbstrahl $+f_2$ trifft zuerst die rechte Focalparabel b, dann die linke c, $+f_4$ umgekehrt zuerst die linke und dann die rechte.*

II. *Von der Focallinie f_3 trifft der Halbstrahl $+f_3$ stets die linke, $-f_3$ stets die rechte Focalparabel.*

Die Sätze § 36, I und § 37, I; II ermöglichen es, die acht Focalhalbstrahlen in der in § 35, 37 angenommenen Weise mit $\pm f_i$ zu benennen, wenn die vier Focallinien an einem Modell oder in einer Zeichnung (vgl. Fig. 23) construirt vorliegen (vgl. Anm. VI, 2).

Wenn der Punkt P in eine der beiden Hauptebenen zu liegen kommt, gehen die vier Focallinien paarweise zusammenfallend in die beiden Focallinien des betreffenden confocalen Parabelsystems über, sodass über ihre Lage selbst nichts zu sagen bleibt. Es kommt nur darauf an, ihre Punkte B, C als Grenzlagen der im Allgemeinen der Tabelle (44) entsprechenden Punkte B, C zu kennzeichnen.

Tritt nun der Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ in die xy-Ebene ein, so fallen nach den auch hier geltenden Formeln § 13, 40 seine acht Focalhalbstrahlen paarweise in die vier Focalhalbstrahlen hinein, welche der Punkt P in dem confocalen Parabelsystem § 27, 9, z besitzt. Was im Besonderen die vier positiven Focalhalbstrahlen angeht, so laufen

für $\lambda = \gamma$ (nach § 13, 40 und Anm. II, 11): $+f_1$ von P nach $x_{-\infty}$, $+f_2$ von P nach B_0, $+f_4$ und $+f_3$ von P nach den mit $+f_1$ und

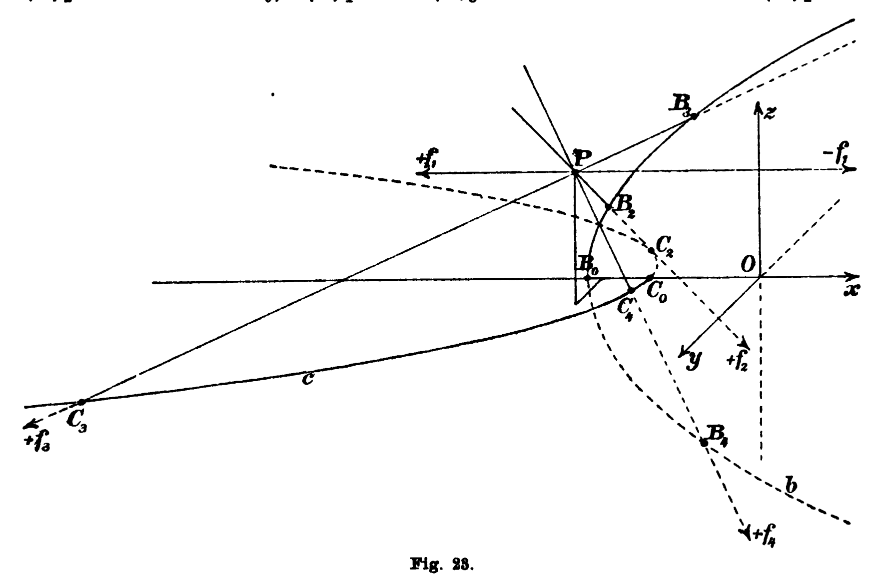


Fig. 23.

$+f_2$ entgegengesetzten Richtungen (vgl. Fig. 23, $\lambda = \gamma$), für $\mu = \gamma$ hingegen $+f_1$ und $+f_3$ nach $x_{-\infty}$, $+f_2$ und $+f_4$ nach B_0 (vgl.

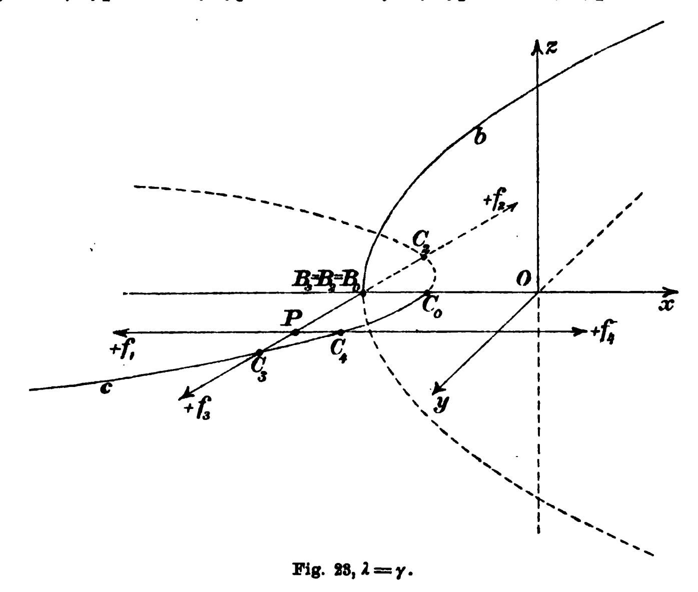


Fig. 23, $\lambda = \gamma$.

Fig. 23, $\mu = \gamma$). Während daher im Falle $\lambda = \gamma$, beim Uebergang von einem ausserhalb der xy-Ebene liegenden Nachbarpunkte zu dem betrachteten

Punkte P dieser Ebene, B_0 die gemeinsame Grenzlage der Schnittpunkte B_2 und B_3 der beiden eben noch getrennten Focallinien f_2

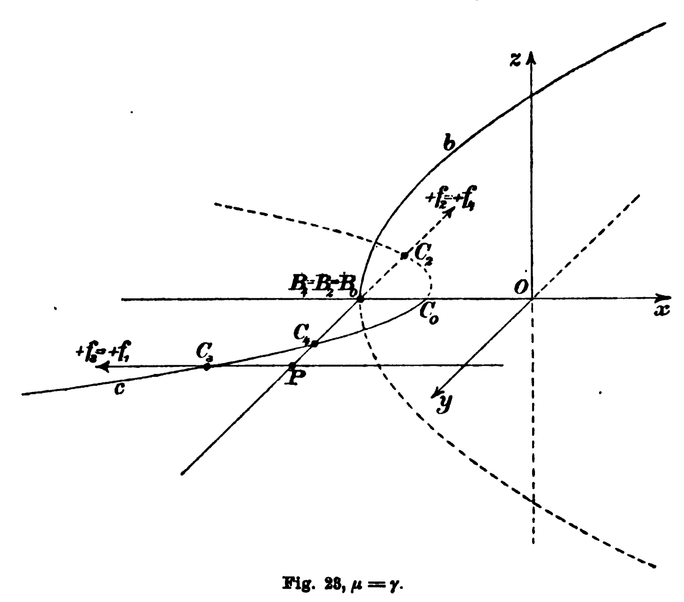


Fig. 23, $\mu = \gamma$.

und f_3 mit der Focalparabel b ist, so sind die beiden Schnittpunkte der vereinigten Focallinie $\pm f_2 = \mp f_3$ mit der linken Focalparabel die

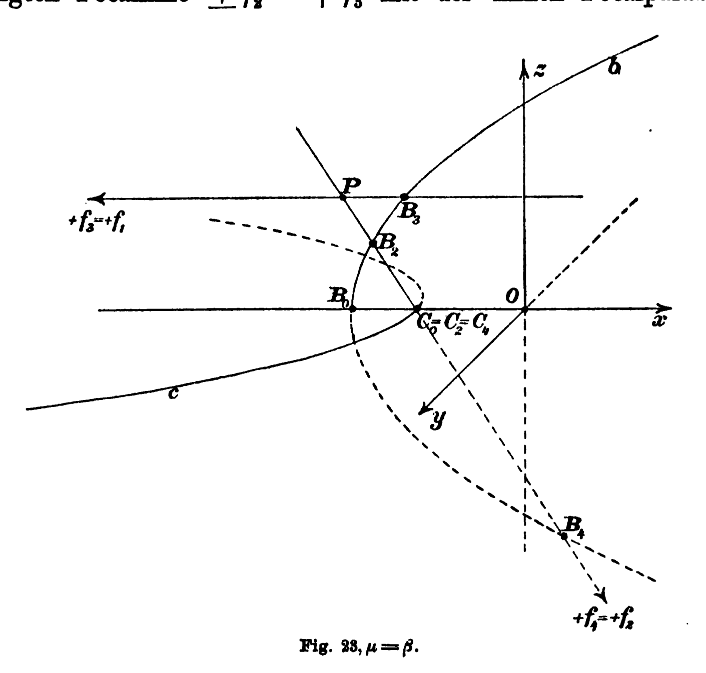


Fig. 23, $\mu = \beta$.

Grenzlagen der früheren Schnittpunkte C_2 und C_3 (vgl. Fig. 23, $\lambda = \gamma$), und zwar der durch B_0 von P getrennte (vgl. § 37, I) die Grenzlage von C_2, der andere von C_3. Ebenso ist auf den vereinigten Focallinien $\pm f_1 = \mp f_4$ der endliche Schnittpunkt mit der linken Focalparabel

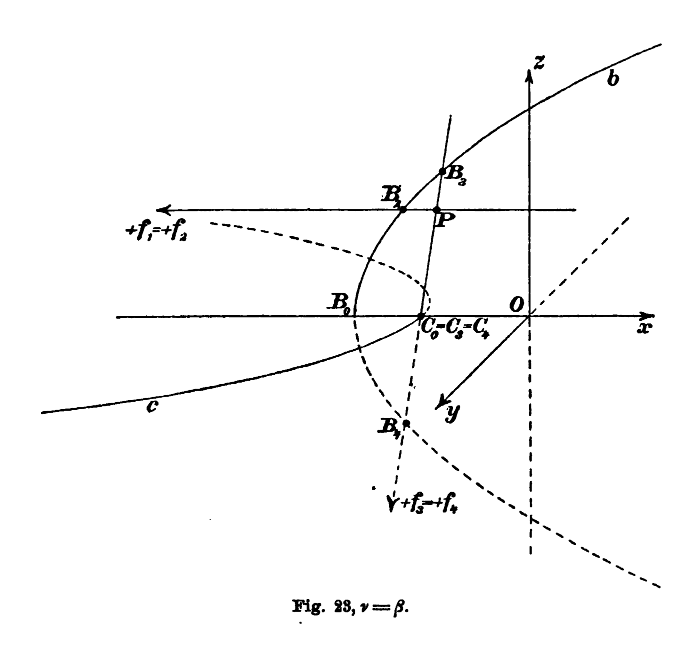


Fig. 23, $\nu = \beta$.

die Grenzlage von C_4, während B_4 in den unendlich fernen Punkt der rechten Focalparabel b gefallen ist. Dementsprechend sind in Fig. 23, $\lambda = \gamma$ und ebenso in den drei folgenden auf die Fälle $\mu = \gamma$, $\mu = \beta$, $\nu = \beta$ bezüglichen Figuren 23 die Punkte B und C mit den Indices 2, 3, 4 derart bezeichnet, wie sie als Grenzlagen der gleichbezeichneten Punkte in der ersten Fig. 23 hervorgehen. Indem in diesem Sinne je zwei zusammengefallene Focallinien noch immer als getrennt aufgefasst werden, bleiben die Sätze I und II, bezüglich die Formeln (44) auch für Punkte der beiden Hauptebenen, vorausgesetzt dass es keine Focalpunkte sind, bestehen.

Bei dem speciellen confocalen System liegen beide Focallinien (vgl. § 35) des Punktes P in seiner Meridianebene. Der Focalhalbstrahl von P nach dem Hauptbrennpunkte $B_0 = C_0$ (vgl. Fig. 23'), der beide Focalaxenstücke b und c in ihrem gemeinsamen Punkte $B_0 = C_0$ trifft, ist nach (44) aus $+f_2$ und $+f_4$ hervorgegangen. Dagegen ist in die mit der Rotationsaxe parallele Focallinie f_1 auch die Focallinie f_3 hineingefallen, indem ihre nach (44) durch P ge-

trennten Punkte B_3 und C_3; dieser nach links und jener nach rechts sich in's Unendliche entfernt haben, sodass $+f_3 = +f_1$. Ersichtlich

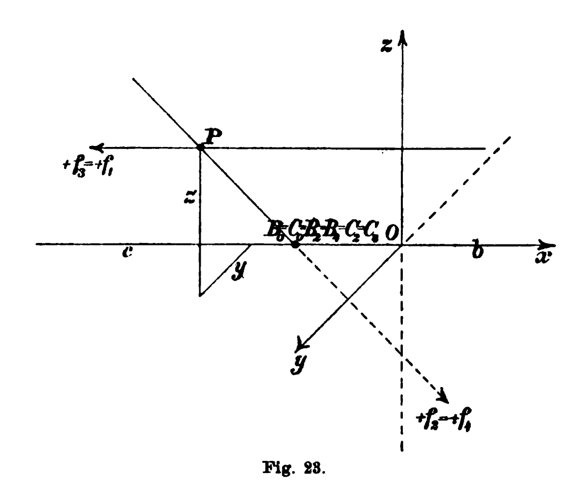


Fig. 23.

ist Fig. 23′ ein Specialfall von Fig. 23, $\mu = \gamma$ oder Fig. 23, $\mu = \beta$, da jede Meridianebene im speciellen System sowohl der xy- als der xz-Ebene des allgemeinen entsprechen kann.

Viertes Capitel.

Die Theorie der gebrochenen Focaldistanzen.

§ 38. Gleichgewichtsdistanzen und kürzeste Entfernungen über die Focalparabeln.

Indem mit P ein beliebiger Punkt im Raume und mit C^0 ein Punkt der linken Focalparabel c bezeichnet wird, sei PBC^0 eine Gleichgewichtsdistanz beider Punkte über die rechte Focalparabel b und B der Gleitpunkt (vgl. § 16). Da dann der Halbstrahl BC^0 dem Rotationskegel Bc angehört, der vom Punkte B über der linken Focalparabel c errichtet ist (vgl. § 34, IV), gilt dasselbe nach § 16, I auch von dem Halbstrahle BP und *muss die Gerade* BP die linke Focalparabel schneiden, also *eine Focallinie des Punktes* P sein. Ist daher P *kein Focalpunkt*, sodass er vier getrennte oder theilweise zusammenfallende Focallinien f_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ hat, so ist B einer der drei Punkte B_2, B_3, B_4, in denen die drei Focallinien f_2, f_3, f_4 die rechte Focalparabel treffen; der Punkt B_1 kommt, da er unendlich

fern liegt, als Gleitpunkt einer Gleichgewichtsdistanz nicht in Betracht. Es können somit keine anderen als die drei gebrochenen Entfernungen PB_iC^0 $(i = 2, 3, 4)$ der Punkte P und C^0 über b Gleichgewichtsdistanzen sein. Damit sie es wirklich sind, ist nach § 16, I erforderlich, dass die Halbstrahlen B_iP und B_iC^0 verschiedenen Mänteln des Rotationskegels B_ic angehören. Da der Halbstrahl B_iC^0 die linke Focalparabel c in C^0 trifft, darf auf dem Halbstrahle B_iP kein Punkt von c liegen, soweit er auch verfolgt wird (hierbei gilt $x_{-\infty}$ (vgl. § 33, zu V) als Punkt auf c und $x_{+\infty}$ als Punkt auf b). Aus den in der Richtung von B_i nach P gelesenen Formeln § 37, 44 ergiebt sich aber, dass diese Bedingung nur für den Halbstrahl B_2P erfüllt ist, während die Halbstrahlen B_3P und B_4P die linke Focalparabel in C_3 und C_4 treffen. Also erhalten wir das Resultat (vgl. Fig. 24):

I. *Zwischen einem beliebigen Punkte P, der kein Focalpunkt ist, und einem Punkte C^0 der linken Focalparabel c giebt es eine einzige Gleichgewichtsdistanz über die rechte Focalparabel, nämlich PB_2C^0.*

II. *Der Gleitpunkt B_2 ist der Schnittpunkt desjenigen der drei Focalhalbstrahlen $+f_i$ $(i = 2, 3, 4)$, welcher zuerst die rechte und dann die linke Focalparabel trifft, mit jener.*

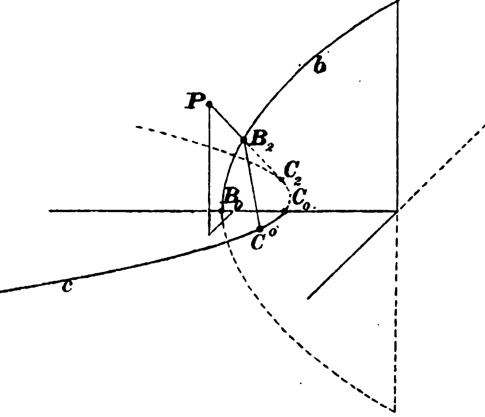


Fig. 24.

Die gebrochene Entfernung PBC^0 der Punkte P und C^0 über die rechte Focalparabel ist nach I nur für eine einzige Lage des Gleitpunktes B eine Gleichgewichtsdistanz und kann nach § 16, III nur für diese ein Maximum oder Minimum ihrer Länge haben. Ein Minimum aber muss sie in der That besitzen. Denn während sie unbegrenzt gross werden kann, indem der Gleitpunkt B auf der rechten Focalparabel sich entsprechend weit entfernt, kann sie niemals verschwinden, da B von dem im Endlichen angenommenen ungleichnamigen Focalpunkt C^0 stets getrennt, also die Entfernung BC^0 niemals null ist. Die einzige vorhandene Gleichgewichtsdistanz ist demnach die kürzeste Entfernung der Punkte P und C^0 über die Focalparabel b:

III. *Zwischen einem beliebigen Punkte P, der kein Focalpunkt ist, und einem Punkte C^0 der linken Focalparabel giebt es stets eine und nur*

eine kürzeste Entfernung über die rechte Focalparabel b, die gebrochene Entfernung PB_2C^0.

Es erübrigt, diese Sätze auf den bisher ausgeschlossenen Fall auszudehnen, dass P *selbst ein Focalpunkt* ist. Hierauf führt am besten die Betrachtung der besonderen Formen der Gleichgewichtsdistanz PB_2C^0 für einen Punkt P einer Hauptebene.

Kommt der Punkt P in die Ebene der linken Focalparabel zu liegen, so fällt (vgl. Fig. 23, $\lambda = \gamma$; $\mu = \gamma$) der Gleitpunkt B_2 in deren Brennpunkt B_0, während zugleich der Rotationskegel B_2c die zweite Grenzform von § 16, II annimmt. Die so sich ergebende Gleichgewichtsdistanz PB_0C^0 (vgl. Fig. 24, γ, β) kommt aber nicht nur jedem Punkte P innerhalb oder ausserhalb der linken Focalparabel, sondern auch einem Punkte $P = C$ dieser selbst zu. Seinen unendlich vielen Focallinien CB entsprechen zwar dann unendlich viele gebrochene Entfernungen CBC^0 der Punkte C und C^0 über die rechte Focalparabel, aber deren Halbstrahlen BC und BC^0 gehören demselben Mantel des Rotationskegels Bc an. Es liegen daher keine Gleichgewichtsdistanzen vor, es sei denn dass mit $B = B_0$ beide Mäntel des Kegels in einer Ebene sich vereinigen. Daher gelten die Sätze I und III auch für einen Punkt P der linken Focalparabel, indem an Stelle von II die Erklärung tritt:

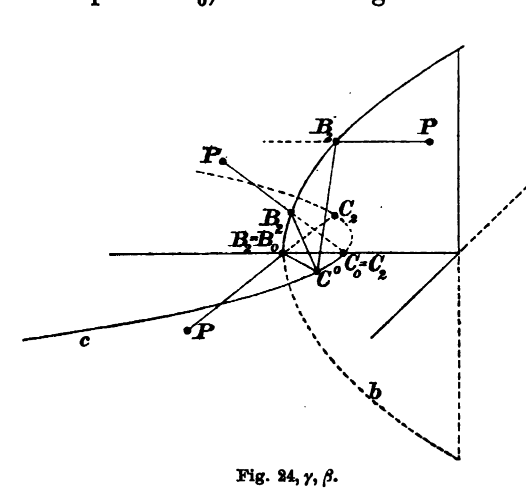


Fig. 24, γ, β.

II, γ, γ. *Der Gleitpunkt B_2 fällt in den Scheitelpunkt B_0 der rechten Focalparabel.*

Bei einem Punkte P in der Ebene der rechten Focalparabel hat die kürzeste Entfernung PB_2C^0 verschiedene Form, jenachdem er im Gebiete $\mu = \beta$ oder $\nu = \beta$ liegt. Im ersten Falle trifft (vgl. Fig. 23, $\mu = \beta$; $\nu = \beta$) das Anfangsstück PB_2 in seiner geradlinigen Fortsetzung über B_2 hinaus auf den Scheitelpunkt C_0 der linken Focalparabel, im letzteren auf ihren unendlich fernen Punkt $x_{-\infty}$. Beide Fälle (vgl. Fig. 24, γ, β) gehen in einander über, indem P mit B_2 zusammenfällt. In der That giebt es, wenn P in irgend einen Punkt B_2 der rechten Focalparabel zu liegen kommt, wiederum nur eine Gleich-

gewichtsdistanz der Punkte B_2 und C^0 über b, die ungebrochene Entfernung $B_2 C^0$. Soll es nämlich noch eine andere Gleichgewichtsdistanz $B_2 B_1 C^0$ mit einem von $P = B_2$ verschiedenen Gleitpunkte B_1 geben, so muss die Gerade $B_1 B_2$ einerseits zu den unendlich vielen Focallinien des Punktes B_2 gehören, andererseits, da sie mit der rechten Focalparabel b zwei Punkte gemein hat, in deren Ebene liegen. Sie kann daher nur die Verbindungslinie des Punktes B_2 mit dem Punkte C_0 oder dem Punkte $x_{-\infty}$ sein. Weder im ersten Falle, wo $B_1 C_0$ und $B_1 C^0$ demselben Mantel des Rotationskegels $B_1 c$ angehören, noch im zweiten, wo der Gleitpunkt unendlich fern wäre, kann $B_2 B_1 C^0$ eine Gleichgewichtsdistanz sein.

Die Sätze I und III gelten daher auch für einen Punkt P der rechten Focalparabel b, indem an Stelle von II die Bemerkung tritt:

II, β, β. *Der Gleitpunkt* B_2 *fällt mit* P *zusammen.*

In Folge der Congruenz der beiden Hälften des Systems confocaler Paraboloide (vgl. § 27, II) können in den vorstehenden Sätzen die Rollen der beiden Focalparabeln vertauscht werden, wobei nach § 37, 44 C_4 an Stelle von B_2 tritt. Die so entstehenden Resultate lauten:

I. *Zwischen einem beliebigen Punkte* P *und einem Punkte* B^0 *der rechten Focalparabel* b (vgl. Fig. 25) *giebt es eine einzige Gleichgewichtsdistanz über die linke Focalparabel, nämlich* $P C_4 B^0$.

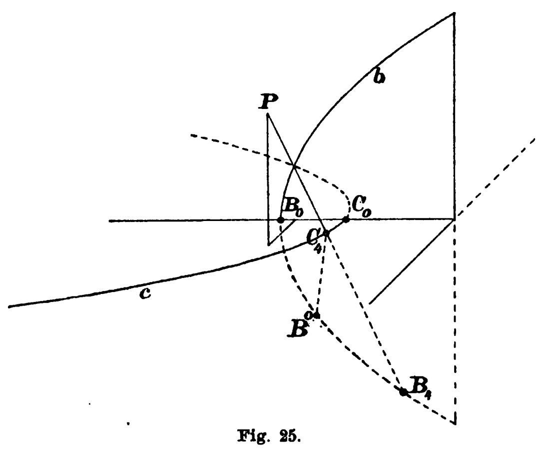


Fig. 25.

II. *Der Gleitpunkt* C_4 *ist, wenn* P *kein Focalpunkt ist, der Schnittpunkt desjenigen der drei Focalhalbstrahlen* $+ f_i$ $(i = 2, 3, 4)$, *welcher zuerst die linke und dann die rechte Focalparabel trifft, mit jener.*

II, β, β. *Der Gleitpunkt* C_4 *fällt, wenn* P *ein Punkt der rechten Focalparabel ist, in den Scheitelpunkt* C_0 *der linken.*

II, γ, γ. *Er fällt mit* P *zusammen, wenn* P *auf der linken Focalparabel liegt.*

III. *Zwischen einem beliebigen Punkte* P *und einem Punkte* B^0 *der rechten Focalparabel giebt es stets eine und nur eine kürzeste Entfernung über die linke Focalparabel* c, *die gebrochene Entfernung* $P C_4 B^0$.

Die Form dieser kürzesten Entfernungen für einen Punkt P im Gebiete $\lambda = \gamma$ oder $\mu = \gamma$ oder $\mu = \beta$ ($\nu = \beta$) ist mit Hinblick auf Fig. 23, $\lambda = \gamma$; $\mu = \gamma$; $\mu = \beta$; $\nu = \beta$ in Fig. 25, γ, β dargestellt.

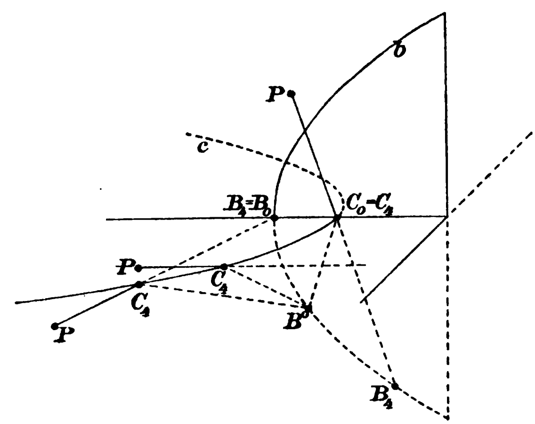


Fig. 25, γ, β.

Bei der *speciellen Form der Focalparabeln* (vgl. Fig. 20′) sind die gebrochenen Linien PB_0C^0 und PC_0B^0 (vgl. Fig. 24′) als Grenzformen der kürzesten Entfernungen des Punktes P von einem Punkte C^0 des linken Focalaxenstückes c über das rechte und von einem Punkte B^0 des rechten Focalaxenstückes b über das linke zu betrachten. Die Gleitpunkte $B_0 = C_0$ liegen im Hauptbrennpunkte fest. Die Gleichgewichtsdistanzen sind keine eigentlichen mehr (vgl. § 17, zu I″).

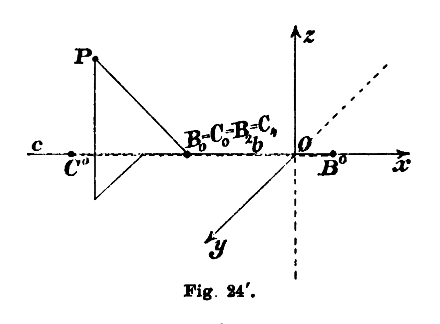


Fig. 24′.

§ 39. Einführung der gebrochenen Focaldistanzen.

Es seien zwei ungleichnamige Focalpunkte gegeben, ein Punkt C^0 der linken und ein Punkt B^0 der rechten Focalparabel.

Die kürzeste Entfernung des laufenden Raumpunktes P vom Punkte B^0 über die linke Focalparabel soll ihrer Gestalt und Länge nach mit r, die kürzeste Entfernung des Punktes P vom Punkte C^0 über die rechte Focalparabel ebenso mit s bezeichnet werden.

Diese beiden kürzesten Entfernungen r und s nennen wir die gebrochenen Focaldistanzen des Punktes P von den festen Focalpunkten B^0 und C^0.

Nach den beiden Sätzen III in § 38 ist (vgl. Fig. 26)

(45) $$r = PC_4 B^0, \quad s = PB_2 C^0.$$

I. *Die Anfangsstücke PC_4 und PB_2 der beiden gebrochenen Focaldistanzen fallen in die beiden positiven Focalhalbstrahlen $+f_4$ und $+f_2$, wenn P kein Focalpunkt ist.*

II. *Die Endstücke C_4B^0 und B_2C^0 verbinden zwei ungleichnamige Focalpunkte.*

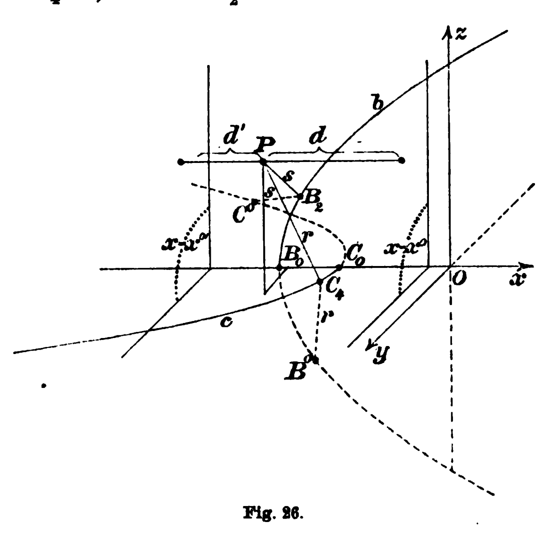


Fig. 26.

Die Form von r und s für einen Punkt P in einer der beiden Hauptebenen ergiebt sich aus § 38 und ist in den Fig. 26, γ und Fig. 26, β für je drei verschiedene Lagen des Punktes: innerhalb, auf oder ausserhalb der Focalparabel der betreffenden Ebene dargestellt. In der xy-Ebene ist das Endstück B_0C^0 von s, in der xz-Ebene das Endstück C_0B^0 von r den drei Lagen von P gemeinsam. Für einen Punkt P der linken Focalparabel ist r, für einen Punkt P der rechten Focalparabel ist s ungebrochen.

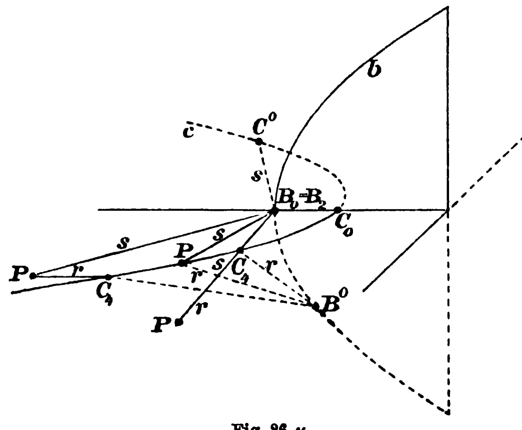


Fig. 26, γ.

III. *Jeder Punkt P des Raumes hat zwei bestimmte gebrochene Focaldistanzen.*

Die den ausgezeichneten Lagen der Punkte B^0 und C^0 in den beiden *Hauptbrennpunkten* B_0 und C_0 entsprechenden gebrochenen Focaldistanzen sollen *die gebrochenen Hauptfocaldistanzen* heifsen und mit r_0 und s_0 bezeichnet werden.

IV. *Es ist also r_0 die kürzeste Entfernung des laufenden Punktes P von dem linken Hauptbrennpunkte über die linke, s_0 von dem rechten Hauptbrennpunkte über die rechte Focalparabel.*

In den Figuren 26 gehen r, s in r_0, s_0 über, wenn die Punkte B^0, C^0 je auf ihrer Focalparabel nach B_0, C_0 rücken. *Die Anfangsstücke der gebrochenen Focaldistanzen bleiben von dieser Aenderung unberührt;* es bewegen sich nur die Endstücke auf dem einen Mantel des vom Gleitpunkte über der ungleichnamigen Focalparabel errichteten Rotationskegels.

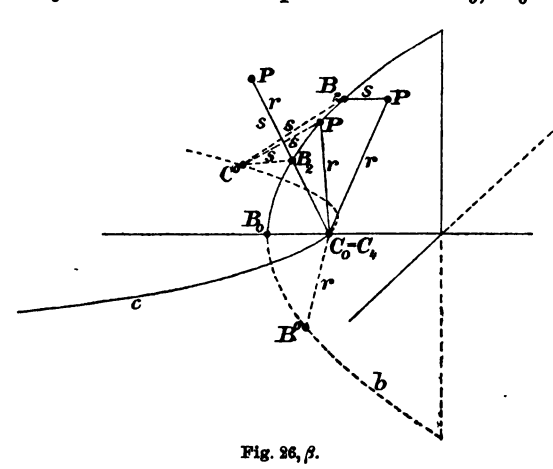


Fig. 26, β.

Lassen wir die beiden Focalparabeln in die specielle Form (vgl. Fig. 20′) übergehen, so fallen die Anfangsstücke der gebrochenen Focaldistanzen r und s zusammen (vgl. Fig. 26′). Die gemeinsame ausgezeichnete Lage der Punkte B^0 und C^0 ist der Hauptbrennpunkt $B_0 = C_0$.

IV′. *Es ist $r_0 = s_0$ die Entfernung des laufenden Punktes vom Hauptbrennpunkt.*

Zu den allgemeinen Focalparabeln zurückkehrend, verstehen wir (vgl. Fig. 26) unter *der rechten und linken Ebenendistanz d und d' eines Punktes P* das von ihm auf eine rechts von ihm liegende feste Ebene $x = x^0$ und das ebenso auf eine links liegende feste Ebene $x = x^{0'}$ gefällte Perpendikel seiner Lage, Richtung und Länge nach.

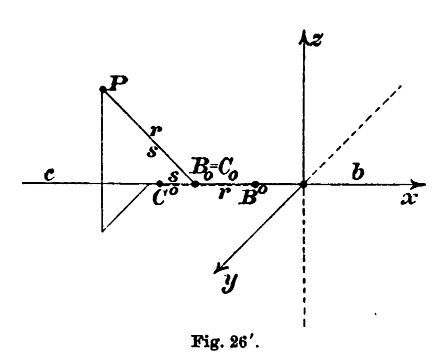


Fig. 26′.

V. *Die beiden Ebenendistanzen d und d' fallen nach* § 36, I *bezüglich in die Focalhalbstrahlen $-f_1$ und $+f_1$ des Punktes P.*

Da die Anfangsstücke der gebrochenen Focaldistanzen r, s und die Ebenendistanzen d, d' gegen die Axen ξ, η, ζ des Punktes P die Anordnung der Focalhalbstrahlen $+f_4$, $+f_2$, $-f_1$, $+f_1$ haben, so folgt, wenn für die Bestimmung der Winkel der gebrochenen Focaldistanzen miteinander und mit den Ebenendistanzen bei jenen, wie in § 19, zu V, die Anfangsstücke maassgebend sind, der Satz (vgl. § 13, 38):

VI. *In einem Punkte λ, μ, ν, der kein Focalpunkt ist, wird der*

Nebenwinkel der Distanzen r und d von der Normale des linken elliptischen Paraboloides λ, der Nebenwinkel der Distanzen r und s von der Normale des hyperbolischen Paraboloides μ, der Nebenwinkel der Distanzen s und d' von der Normale des rechten elliptischen Paraboloides ν halbirt.

Für einen Punkt P in einer der Grenzflächen $\lambda = \gamma$, $\mu = \gamma$, $\mu = \beta$ oder $\nu = \beta$ ist hierbei als Normale der Grenzfläche die Normale ihrer Ebene anzusehen. Beispielsweise halbiert die Normale der xy-Ebene in dem innerhalb c gelegenen Punkte P in Fig. 26, γ als Normale des linken elliptischen Paraboloides $\lambda = \gamma$ den Nebenwinkel von r und d, welcher, da d mit dem Anfangsstücke PC_4 von r zusammenfällt, ein gestreckter ist.

In einem Punkte P der linken Focalparabel (vgl. Fig. 26, γ) ist einerseits nur die Normale ζ, die Tangente der Parabel, bestimmt und hat andererseits r kein Anfangsstück. Es bleibt dann von Satz VI nur übrig, dass die Normale ζ den Nebenwinkel der Distanzen s und d' halbirt, welche in die Focalhalbstrahlen $+f_2$ und $+f_1$ (vgl. Anm. II, 11) des confocalen Parabelsystems (9, z) der xy-Ebene fallen. Analoges gilt bei der Symmetrie der beiden Focalparabeln auch für einen Punkt der rechten Focalparabel.

Mit $r = s$ überträgt sich Satz VI auf das System der Rotationsparaboloide § 28, 12′ und kommt hier auf den entsprechenden Satz über das confocale Parabelsystem § 27, 9_0 der Meridianebene zurück (vgl. Anm. II, 13).

§ 40. Die Focaleigenschaften der Focalparabeln.

Die Entfernung zweier Punkte $P_1 = \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ und $P_2 = \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ einer Focallinie lässt sich nach § 36, 42 durch Integration ermitteln. Liegt zwischen P_1 und P_2 kein Focalpunkt B oder C, so bleibt nach (43) zwischen P_1 und P_2 die Charakteristik des Focallinienelementes unverändert und folgt auf die angegebene Weise:

I. *Die absolute Entfernung zweier Punkte $P_1 = \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ und $P_2 = \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ einer Focallinie, zwischen denen kein Focalpunkt liegt und zwischen denen die Charakteristik des Focallinienelementes in der Richtung von P_1 nach P_2 den Werth* ($\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$) *hat, ist:*

$$(46) \qquad P_1P_2 = \frac{1}{2}\mathfrak{l}(\lambda_2 - \lambda_1) + \frac{1}{2}\mathfrak{m}(\mu_2 - \mu_1) + \frac{1}{2}\mathfrak{n}(\nu_2 - \nu_1).$$

Diese Formel kann unmittelbar auch Anwendung finden, wenn einer oder beide Punkte P_1 und P_2 selbst an eine der Stellen B, C zu liegen kommt, da sie vollkommen bestimmt bleibt, obwohl dies von den Differentialen (42) alsdann zum Theil nicht mehr gilt.

Beim Eintritt der beiden Punkte P_1 und P_2 in das Gebiet $\lambda = \gamma$ der xy-Ebene wird für alle Elemente der Focallinie zwischen P_1 und

P_2 nach § 13, 40 $\mathfrak{l} = 0$. Die erste runde Klammer in (46) verschwindet aber schon dadurch, dass dann $\lambda_1 = \lambda_2 = \gamma$ wird. Wir können daher in solchem Falle die Formel (46) ohne Weiteres anwenden, ohne auf die Veränderung des Symbols $\mathfrak{l}$ Rücksicht zu nehmen.

Es seien nun zwei ungleichnamige Focalpunkte $B = \lambda, \beta, \beta$ und $C = \gamma, \gamma, \nu$ (vgl. § 29 vor III) gegeben. Dann befindet sich nach § 36, 43 auf der diese Punkte verbindenden Focallinie zwischen B und C kein dritter Focalpunkt und die Charakteristik in der Richtung von B nach C ist stets $(+ - +)$. Daher wird nach (46):

$$BC = \frac{1}{2}(\gamma - \lambda) - \frac{1}{2}(\gamma - \beta) + \frac{1}{2}(\nu - \beta).$$

Die Formel gilt nach der vorigen Bemerkung auch, wenn beide Punkte B und C in einer Hauptebene liegen, obwohl dann in der benutzten Charakteristik $(+ - +)$ ein Element verschwindet. Ein Focalpunkt liegt nämlich auch dann nicht zwischen den Punkten B und C, da der eine von diesen der Focalparabel der Hauptebene angehören und der andere deren Brennpunkt sein muss. Daher folgt allgemein:

II. *Die absolute Entfernung zweier ungleichnamiger Focalpunkte* $B = \lambda, \beta, \beta$ *und* $C = \gamma, \gamma, \nu$ *ist:*

(48) $$BC = \frac{1}{2}(\nu - \lambda).$$

Hieraus ergiebt sich eine *Focaleigenschaft der Focalparabeln*, die wir die Dupin'sche nennen wollen. Sind nämlich $B_1 = \lambda_1, \beta, \beta$ und $B_2 = \lambda_2, \beta, \beta$ zwei feste Punkte der rechten Focalparabel b und $C = \gamma, \gamma, \nu$ der laufende Punkt der linken (vgl. Fig. 27), so ist nach (48):

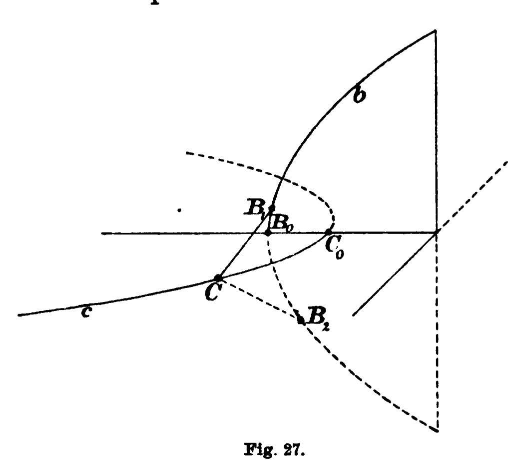


Fig. 27.

$$CB_1 = \frac{1}{2}(\nu - \lambda_1),$$

$$CB_2 = \frac{1}{2}(\nu - \lambda_2)$$

und daher:

(49, c) $$CB_1 - CB_2 = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Ebenso ergiebt sich, wenn $C_1 = \gamma, \gamma, \nu_1$ und $C_2 = \gamma, \gamma, \nu_2$ zwei feste Punkte der linken und $B = \lambda, \beta, \beta$ der laufende Punkt der rechten Focalparabel ist:

(49, b) $$BC_1 - BC_2 = \frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2).$$

Beide Gleichungen (49) zusammengefasst geben die erwähnte Focaleigenschaft:

III. *Für jeden Punkt der einen Focalparabel ist die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten der anderen dieselbe.*

Für die specielle Form der Focalparabeln (vgl. Fig. 20′) ist der Satz selbstverständlich.

§ 41. **Die Länge der gebrochenen Focaldistanzen und der Ebenendistanzen.**

Indem wir uns zur Bestimmung der Länge der gebrochenen Focaldistanzen wenden, betrachten wir zuerst ihre Anfangsstücke. Diese enthalten, so oft der laufende Punkt P ausserhalb der beiden Hauptebenen liegt, nach § 37, 44 und § 39, 45 zwischen ihm und dem Gleitpunkte keinen Focalpunkt. Ihre Länge bestimmt sich daher mittels des Satzes § 40, I, und zwar ergiebt sich mit der Bezeichnung:

$$P = \lambda,\ \mu,\ \nu \quad C_4 = \gamma,\ \gamma,\ \nu_4 \quad B_2 = \lambda_2,\ \beta,\ \beta$$

und mit Rücksicht auf die von P nach C_4 oder von P nach B_2 geltenden Charakteristiken $(+ - -)$ oder $(+ + -)$ (vgl. § 39, I und § 35, 37):

$$PC_4 = \frac{1}{2}(\gamma - \lambda) - \frac{1}{2}(\gamma - \mu) - \frac{1}{2}(\nu_4 - \nu)$$

$$PB_2 = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda) + \frac{1}{2}(\beta - \mu) - \frac{1}{2}(\beta - \nu)$$

oder:

$$(50)\qquad \begin{cases} PC_4 = \frac{1}{2}(-\lambda + \mu + \nu - \nu_4) \\ PB_2 = \frac{1}{2}(-\lambda - \mu + \nu + \lambda_2). \end{cases}$$

Fällt der Punkt $P = \lambda,\ \mu,\ \nu$ in eine Hauptebene, so gilt die Ableitung der Formeln (50) nach der zu § 40, I gemachten Bemerkung ohne Weiteres, so oft sich zwischen P und den betreffenden Gleitpunkt kein Focalpunkt einschiebt. Dies tritt (vgl. Fig. 26, γ; β) in der xy-Ebene nur im Gebiete $\mu = \gamma$ bei dem Anfangsstücke PB_2 von s und in der xz-Ebene nur im Gebiete $\mu = \beta$ bei dem Anfangsstücke PC_4 von r ein. Diese beiden Anfangsstücke sind aber die Focaldistanzen des Punktes P in den beiderseitigen parabolischen Coordinatensystemen $\lambda^{\cdot}$, $\mu^{\cdot}$ und $\lambda^{\cdot\cdot}$, $\mu^{\cdot\cdot}$ (vgl. § 29, IV) und daher (vgl. Anm. II, 12)

$$PB_2 = PB_0 = \frac{1}{2}(-\lambda + \nu), \quad PC_4 = PC_0 = \frac{1}{2}(-\lambda + \nu),$$

Dieselben Werthe giebt aber die zweite und erste Formel (50) bezüglich mit $\mu = \gamma$, $\lambda_2 = \gamma$ und $\mu = \beta$, $\nu_4 = \beta$.

Auch für einen Focalpunkt P ist die Ableitung der Formeln (50) hinfällig, da hier der benutzte Satz § 39, I nicht mehr vorliegt. Nun ist aber für einen Punkt der linken Focalparabel (vgl. Fig. 26, γ) neben $\lambda = \mu = \gamma$ auch $\lambda_3 = \gamma$, $\nu_4 = \nu$. Wenn daher die Formeln (50) mit diesen Werthen die Gleichungen:

$$PC_4 = 0, \quad PB_2 = \frac{1}{2}(-\gamma + \nu)$$

geben, so ist die Richtigkeit der ersten evident, die zweite aber als Specialfall der soeben mittels der elliptischen Coordinaten $\lambda^{\cdot}$, $\mu^{\cdot}$ bewiesenen Formel für PB_2 ebenfalls richtig.

Die Formeln (50) *geben also die Längen der Anfangsstücke der gebrochenen Focaldistanzen ausnahmlos für jede Lage des Punktes* λ, μ, ν.

Die Endstücke der gebrochenen Focaldistanzen verbinden nach § 39, 45 die Gleitpunkte:

$$C_4 = \gamma, \gamma, \nu_4 \qquad B_2 = \lambda_3, \beta, \beta$$

bezüglich mit den ungleichnamigen Focalpunkten:

$$B^0 = \lambda^0, \beta, \beta \qquad C^0 = \gamma, \gamma, \nu^0,$$

sodass nach § 40, 48:

$$(51) \qquad C_4 B^0 = \frac{1}{2}(\nu_4 - \lambda^0) \quad B_2 C^0 = \frac{1}{2}(\nu^0 - \lambda_3).$$

Bei der Addition der nach § 39, 45 zusammengehörigen Formeln (50) und (51) fallen die Coordinaten der Gleitpunkte heraus und ergiebt sich als Gesammtresultat:

Die absoluten Längen der beiden gebrochenen Focaldistanzen eines Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ *von den zwei festen Focalpunkten* $B^0 = \lambda^0, \beta, \beta$ *und* $C^0 = \gamma, \gamma, \nu^0$ *sind:*

$$(52) \qquad \begin{cases} r = \frac{1}{2}(-\lambda + \mu + \nu - \lambda^0) \\ s = \frac{1}{2}(-\lambda - \mu + \nu + \nu^0). \end{cases}$$

Die Formeln gelten ausnahmlos für jede Lage des Punktes P.

Verlegen wir die Punkte B^0 und C^0 mit $\lambda^0 = \gamma$, $\nu^0 = \beta$ nach den beiden Hauptbrennpunkten, so folgt:

Die absoluten Längen der beiden Hauptfocaldistanzen eines Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ *sind:*

$$(53) \qquad \begin{cases} r_0 = \frac{1}{2}(-\lambda + \mu + \nu - \gamma) \\ s_0 = \frac{1}{2}(-\lambda - \mu + \nu + \beta). \end{cases}$$

Sind x, y, z die Parallelcoordinaten des Punktes P, ferner $x = x^0$ und $x = x^{0'}$ die Gleichungen einer rechts und einer links von P liegenden, zur Hauptaxe senkrechten Ebene, so sind die absoluten Werthe der Distanzen d und d' (vgl. Fig. 26):

$$d = x^0 - x \qquad d' = x - x^{0'}$$

oder mit Benutzung der für jede Lage von P ausnahmlos gültigen ersten Formel § 29, 17:

Die absoluten Werthe der rechten und linken Ebenendistanz eines Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ von den festen Ebenen $x = x^0$ und $x = x^{0'}$ sind:

$$(54) \qquad \begin{cases} d = \frac{1}{2}(\lambda + \mu + \nu - \beta - \gamma) + x^0 \\ d' = \frac{1}{2}(-\lambda - \mu - \nu + \beta + \gamma) - x^{0'}. \end{cases}$$

Für das *specielle confocale System* § 28, 12′ geht aus (53) mit $\gamma = \mu = \beta$ hervor (vgl. § 28, 13):

$$(53') \qquad r_0 = s_0 = \frac{1}{2}(-\lambda + \nu).$$

In der That fallen (vgl. Fig. 26′) r_0 und s_0 in die unter § 39, IV′ definirte ungebrochene Hauptfocaldistanz zusammen. Dass diese die Länge (53′) hat, folgt daraus, dass jetzt (vgl. § 29, zu 17′) λ, ν die parabolischen Coordinaten des Punktes P in seiner Meridianebene und r_0 seine Focaldistanz in dieser ist (vgl. Anm. II, 12, 53⁰); von der dritten parabolischen Coordinate μ' ist sie unabhängig.

§ 42. Die Focaleigenschaft des elliptischen Paraboloides.

Die beiden Distanzen r und d eines Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$, deren Nebenwinkel nach § 39, VI von der Normale ξ des linken elliptischen Paraboloides λ halbirt wird, haben nach (52) und (54) eine von μ und ν unabhängige Differenz:

$$(55) \qquad r - d = -\lambda - x^0 + \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \lambda^0)$$

und die beiden Distanzen s und d', deren Nebenwinkel von der Normale ζ des rechten elliptischen Paraboloides ν halbirt wird, ebenso eine von λ und μ unabhängige Differenz:

$$(55) \qquad s - d' = \nu + x^{0'} - \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \nu^0).$$

Die Differenz $r - d$ ist daher für zwei links von der Ebene x^0 liegende Punkte immer dann und nur dann von gleichem Werthe, wenn die Punkte demselben elliptischen Paraboloide λ angehören und die Differenz $s - d'$ für zwei rechts von der Ebene $x^{0'}$ liegende Punkte

von gleichem Werthe, wenn die Punkte demselben elliptischen Paraboloid ν angehören. Wird nun bei gegebenem λ oder ν bezüglich:

$$x^0 > -\frac{\lambda}{2} \quad \text{und} \quad x^{0\prime} < -\frac{\nu}{2}$$

genommen, so liegen alle Punkte des Paraboloides λ links von der Ebene $x = x^0$ und alle Punkte des Paraboloides ν rechts von der Ebene $x = x^{0\prime}$, und folgen die beiden Sätze:

I, λ. Für jeden Punkt eines linken elliptischen Paraboloides λ ist die Differenz der gebrochenen Focaldistanz r und der Ebenendistanz d dieselbe, und wird der Nebenwinkel beider Distanzen von der Normale des Paraboloides halbirt.

I, ν. Für jeden Punkt eines rechten elliptischen Paraboloides ν ist die Differenz der gebrochenen Focaldistanz s und der Ebenendistanz d' dieselbe, und wird der Nebenwinkel beider Distanzen von der Normale des Paraboloides halbirt.

Beide Sätze sind insofern gleichbedeutend, als jedes elliptische Paraboloid eines confocalen Systems ebensowohl als rechtes wie als linkes vorkommt (vgl. § 27, II) und lassen sich daher in einen Satz vereinigen, der von der Lage des Paraboloides unabhängig ist.

Zu dem Zwecke nennen wir (vgl. § 39, Anf.) die kürzeste Entfernung eines Punktes P eines elliptischen Paraboloides von einem festen Punkte der äusseren Focalparabel über die innere die *innere gebrochene Focaldistanz* des Punktes P. Im Besonderen verstehen wir unter der *inneren gebrochenen Hauptfocaldistanz* des Punktes die ganz im Inneren der Fläche gelegene, kürzeste Entfernung vom Brennpunkte der inneren Focalparabel (dem Scheitelpunkte der äusseren) über die innere Focalparabel. Ferner nennen wir die Distanz des Punktes P von einer zur Hauptaxe des Paraboloides senkrechten und es nicht schneidenden Ebene die *äussere Ebenendistanz* des Punktes.

Nach diesen Definitionen ist für die linken elliptischen Paraboloide λ des confocalen Systems r, für die rechten Paraboloide ν aber s die innere gebrochene Focaldistanz (vgl. § 27, nach V), für jene d, für diese aber d' die äussere Ebenendistanz. Die beiden vorigen Sätze vereinigen sich daher zu diesem:

I. *Für jeden Punkt des elliptischen Paraboloides ist die Differenz der inneren gebrochenen Focaldistanz und der äusseren Ebenendistanz dieselbe und wird der Nebenwinkel beider Distanzen von der Normale des Paraboloides halbirt.*

Dieser Satz lässt sich aber noch vereinfachen, wobei es genügt, wenn wir uns in der Bezeichnung an die linken elliptischen Parabo-

loide λ halten, da auch die Gleichungen (55) gegen links und rechts entsprechend sind.

Der constante Werth $r - d$ in der ersten Gleichung (55) wird null, wenn über die disponible Ebene $x = x^0$ in der Weise:

(56) $$x^0 = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\beta - \lambda}{2} + \frac{\gamma - \lambda^0}{2}$$

verfügt wird, womit auch, wie oben verlangt, $x^0 > -\frac{\lambda}{2}$ ist. Diese dem elliptischen Paraboloide λ und dem gewählten festen Focalpunkte $B^0 = \lambda^0, \beta, \beta$ (vgl. § 39, Anf.) eigenthümliche Ebene (56), welche der Scheiteltangentialebene $x = -\frac{\lambda}{2}$ parallel und durch sie von dem Paraboloide getrennt ist, nennen wir *die dem Focalpunkte* $B^0 = \lambda^0, \beta, \beta$ *entsprechende Directrixebene des Paraboloides* λ. Mit dieser Ausdrucksweise lautet Satz I folgendermaassen:

II. *Für jeden Punkt des elliptischen Paraboloides* (λ) *ist die innere gebrochene Focaldistanz* (r) *gleich dem Abstande* (d) *von der ihrem festen Endpunkte* (B^0) *entsprechenden Directrixebene.*

Die dem Scheitelpunkte $B_0 = \gamma, \beta, \beta$ der äusseren Focalparabel b entsprechende Directrixebene des elliptischen Paraboloides λ nennen wir die *Hauptdirectrixebene* des Paraboloides. Ihre Gleichung ist nach (56):

(56_0) $$x = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\beta - \lambda}{2}$$

und daher ihr Abstand vom Scheitelpunkte $x = -\frac{\lambda}{2}$ des Paraboloides: $\frac{\beta - \lambda}{2}$. Da nun $\beta - \lambda$ der Parameter des ersten Hauptschnittes des Paraboloides λ ist (vgl. § 27, nach IV), so geht die betrachtete Ebene durch die Directrix, welche der erste Hauptschnitt als Parabel besitzt. Wir erhalten daher als eine von der Lage des Paraboloides unabhängige Definition der Hauptdirectrixebene:

Die Hauptdirectrixebene eines elliptischen Paraboloides ist senkrecht zur Hauptaxe und geht durch die Directrix der Parabel, in welcher das Paraboloid von der Ebene seiner inneren Focalparabel geschnitten wird.

Indem wir jetzt den für Satz II noch willkürlichen Punkt B^0 in den linken Hauptbrennpunkt B_0 verlegen, erhalten wir den folgenden specielleren Satz:

III. *Für jeden Punkt des elliptischen Paraboloides ist die innere gebrochene Hauptfocaldistanz* (r_0) *gleich der Distanz* (d_0) *von der Hauptdirectrixebene* (D_0) *und wird der Nebenwinkel*

beider Distanzen von der Normale (ξ) des Paraboloides halbirt (vgl. Fig. 28, deren Bezeichnungen einem linken elliptischen Paraboloid λ entsprechen).

Aus diesem Satze kann aber auch der allgemeinere II mittels

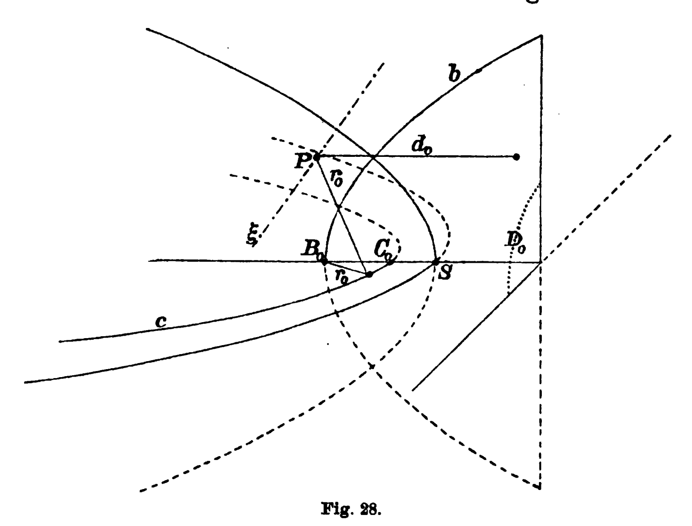


Fig. 28.

der Dupin'schen Focaleigenschaft der Focalparabeln wieder hergeleitet werden. Da nämlich B^0 und B_0 (vgl. Fig. 26) zwei Punkte der rechten Focalparabel b sind, so ist nach § 40, 49, c unabhängig von C_4:

$$C_4B^0 - C_4B_0 = \frac{\gamma - \lambda^0}{2},$$

also da nach § 39, 45:

$$r = PC_4B^0, \quad r_0 = PC_4B_0$$

ist:

$$r = r_0 + \frac{\gamma - \lambda^0}{2}.$$

Andererseits ist nach (56) und (56_0)

$$d = d_0 + \frac{\gamma - \lambda^0}{2}.$$

und damit:

$$r - d = r_0 - d_0.$$

Es folgt daher Satz II aus Satz III, sodass der letztere als Normalform der Focaleigenschaft des elliptischen Paraboloides gelten kann.

Diese Focaleigenschaft kommt, wie allen Punkten des Paraboloides, auch denen der beiden Hauptschnitte zu. Der Hauptschnitt $z = 0$ des linken elliptischen Paraboloides λ (vgl. Fig. 29) ist eine Parabel mit dem Brennpunkte B_0, welche ausserhalb der linken Focalparabel c liegt und deren Directrix D_1 die Schnittlinie der Hauptdirectrixebene D_0

mit der xy-Ebene ist. Fällt nun der Punkt P des Paraboloides in diesen Hauptschnitt, so wird, nach Fig. 26, γ, $r_0 = PC_4B_0$ die gerade Verbindungslinie von P und B_0. Diese also ist nach III gleich der

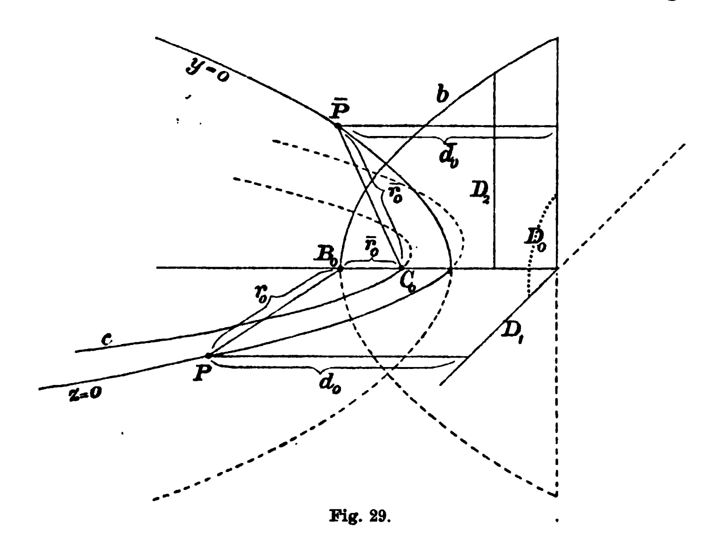


Fig. 29.

Entfernung d_0 des Punktes von der Ebene D_0 d. h. jetzt von der Geraden D_1, worin die gewöhnliche Focaleigenschaft der Parabel besteht (vgl. Anm. II, 13).

Der Hauptschnitt $y = 0$ ist eine Parabel mit dem Brennpunkte C_0, welcher von der rechten Focalparabel in den Kreispunkten geschnitten wird und die Directrix D_2 hat (vgl. Fig. 29), welche von der Hauptdirectrixebene D_0 um dieselbe Grösse $\frac{\beta - \gamma}{2}$ nach links absteht, wie der Brennpunkt C_0 des zweiten Hauptschnittes vom Brennpunkt B_0 des ersten nach rechts. Für einen Punkt P des zweiten Hauptschnittes (in Fig. 29 mit $\overline{P}$ bezeichnet) ist nun nach Fig. 26, β das Anfangsstück von $r_0 = PC_0B_0$ die Verbindungslinie von P mit C_0 und das Endstück C_0B_0 unveränderlich. Es übertrifft daher r_0 die direkte Distanz PC_0 um dieselbe Grösse, um welche der Abstand d_0 des Punktes P von der Hauptdirectrixebene D_0 seinen Abstand von D_2 übertrifft. Diese Grösse hebt sich aus der Differenz $r_0 - d_0$ weg, deren im Satz III ausgesprochenes Verschwinden also bedeutet, dass P von Brennpunkt und Directrix des Hauptschnittes gleich weit absteht.

IV. *Die Focaleigenschaft III des elliptischen Paraboloides reducirt sich für jeden der beiden Hauptschnitte auf die einfache Focaleigenschaft der Parabel.*

Wenn mit $\beta = \gamma$ (vgl. § 28, 13) das Paraboloid λ ein Rotations-

paraboloid mit dem Hauptbrennpunkte $B_0 = C_0$ wird, geht nach § 39, IV′ r_0 in die directe Entfernung des Punktes P vom Hauptbrennpunkt und nach ihrer Definition die Hauptdirectrixebene in den Ort der Directricen aller Meridianschnitte des Rotationsparaboloides über. Somit ergiebt sich aus III die Focaleigenschaft des Rotationsparaboloides:

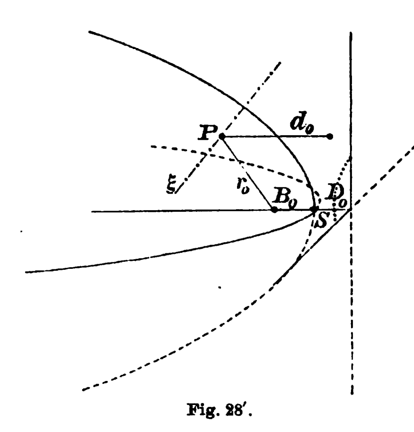


Fig. 28′.

III.′ *Für jeden Punkt des Rotationsparaboloides ist die Hauptfocaldistanz (r_0) gleich der Distanz (d_0) von der Hauptdirectrixebene (D_0) und wird der Nebenwinkel beider Distanzen von der Normale (ξ) des Paraboloides halbirt* (vgl. Fig. 28′).

§ 43. Die Focaleigenschaft des hyperbolischen Paraboloides.

Die beiden gebrochenen Focaldistanzen r und s eines Punktes λ, μ, ν, deren Nebenwinkel nach § 39, VI von der Normale η des hyperbolischen Paraboloides μ halbirt wird, haben nach (52) eine von ν und λ unabhängige Differenz:

$$(57)\qquad r - s = \frac{\mu - \lambda^0}{2} - \frac{\nu^0 - \mu}{2}.$$

Diese Differenz ist daher für zwei Punkte λ, μ, ν immer dann und nur dann dieselbe, wenn sie demselben hyperbolischen Paraboloide μ des confocalen Systems § 27, 9 angehören, sodass bei der Symmetrie der Gleichung (57) in Bezug auf die beiden Hälften des confocalen Systems (vgl. § 27, II) allgemein folgt:

I. *Für jeden Punkt des hyperbolischen Paraboloides ist die Differenz der beiden gebrochenen Focaldistanzen dieselbe und wird der Nebenwinkel beider Distanzen von der Normale des Paraboloides halbirt.*

Werden die festen Focalpunkte $B^0 = \lambda^0, \beta, \beta$ und $C^0 = \gamma, \gamma, \nu^0$, auf welche sich r und s beziehen, in die Hauptbrennpunkte $B_0 = \gamma, \beta, \beta$ und $C_0 = \gamma, \gamma, \beta$ verlegt, so nimmt die Gleichung (57) die speciellere Form an:

$$(58)\qquad r_0 - s_0 = \frac{\mu - \gamma}{2} - \frac{\beta - \mu}{2} = \mu - \frac{\beta + \gamma}{2},$$

aus der sich aber mit Hilfe der Dupin'schen Focaleigenschaft der Focalparabeln die allgemeine wieder ableiten lässt.

Nach § 40, 49, c und b ist nämlich in der Bezeichnung der Fig. 26:

$$C_4B^0 - C_4B_0 = \frac{\gamma - \lambda^0}{2}, \quad B_2C^0 - B_2C_0 = \frac{\nu^0 - \beta}{2}$$

und daraus:

$$PC_4B^0 - PB_2C^0 = PC_4B_0 - PB_2C_0 + \frac{\gamma - \lambda^0}{2} - \frac{\nu^0 - \beta}{2}$$

oder nach § 39, 45:

$$r - s = r_0 - s_0 + \frac{\gamma - \lambda^0}{2} - \frac{\nu^0 - \beta}{2}.$$

Hiernach folgt aber aus der Gleichung (58) wieder die Gleichung (57).

II. *Die Eigenschaft* (57) *des hyperbolischen Paraboloides* μ *ist eine Combination der Eigenschaft* (58) *mit der Dupin'schen Focaleigenschaft der Focalparabeln.*

Als wesentlicher Theil der Focaleigenschaft des Paraboloides μ bleibt also die Gleichung (58) bestehen, welche, da

$$x = -\frac{\beta}{2}, \quad x = -\frac{\mu}{2} \quad \text{und} \quad x = -\frac{\gamma}{2}$$

die x-Coordinaten des linken Hauptbrennpunktes B_0, des Scheitelpunktes S und des rechten Hauptbrennpunktes C_0 sind, in Worten lautet:

III. *Für jeden Punkt des hyperbolischen Paraboloides ist die Differenz der beiden gebrochenen Hauptfocaldistanzen* $(r_0 - s_0)$ *gleich der Differenz der Entfernungen des Scheitel-*

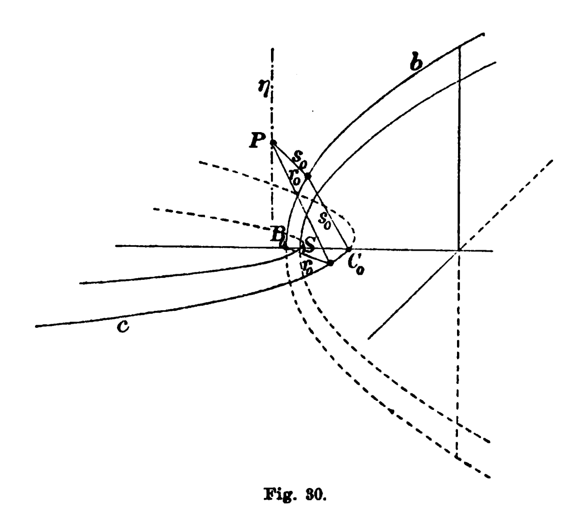


Fig. 30.

punktes (S) von den beiden Hauptbrennpunkten (C_0 *und* B_0) *und wird der Nebenwinkel beider Distanzen von der Normale* (η) *des Paraboloides halbirt* (vgl. Fig. 30, wo das Paraboloid μ in

einer seiner beiden Lagen innerhalb des confocalen Systems angenommen ist).

Der Hauptschnitt $z = 0$ des hyperbolischen Paraboloides μ ist eine Parabel, welche mit der linken Focalparabel c den Brennpunkt B_0 gemein hat und von ihr umschlossen wird (vgl. Fig. 31). Für einen

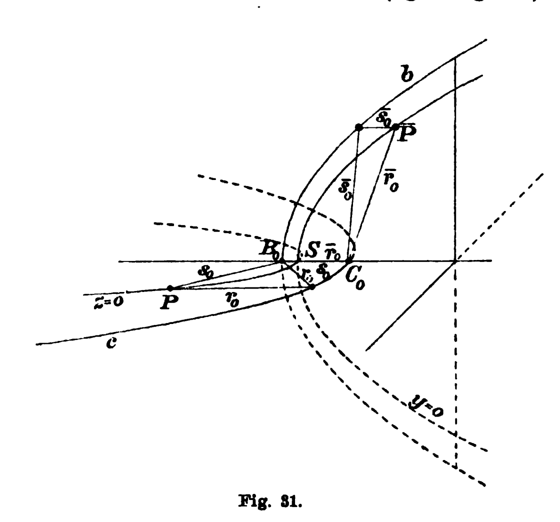


Fig. 31.

Punkt P des Hauptschnittes ist daher, nach Fig. 26, γ, r_0 die kürzeste Entfernung von dem Brennpunkte B_0 über die linke Focalparabel c, das Anfangsstück von s_0 aber die directe Entfernung von B_0 und das Endstück $B_0 C_0 = \frac{\beta - \gamma}{2}$ von s_0 unveränderlich. Indem wir daher die in $- s_0$ enthaltene Grösse $-\frac{\beta - \gamma}{2}$ von der linken Seite der Gleichung (58) auf die rechte bringen, erhalten wir:

$$r_0 - PB_0 = \mu - \gamma.$$

Da nun der Hauptschnitt und die linke Focalparabel als zwei beliebige gleichnamige Parabeln eines confocalen Systems (vgl. Anm. II, 2, 12⁰) gelten können, so giebt diese Gleichung den Satz:

IV. *Für jeden Punkt einer Parabel ist die Differenz der über eine confocale äussere Parabel genommenen und der directen kürzesten Entfernung vom gemeinsamen Brennpunkt gleich der doppelten Entfernung der Scheitelpunkte beider Parabeln* (vgl. den directen Beweis Anm. II, 14).

Auf denselben Satz führt die Gleichung (58) in ihrer Anwendung auf einen Punkt P des zweiten Hauptschnittes (in Fig. 31 mit $\bar{P}$ bezeichnet), indem sie die Form:

$$s_0 - PC_0 = \beta - \mu$$

annimmt.

V. *Die Focaleigenschaft des hyperbolischen Paraboloides führt für die beiden Hauptschnitte auf die zusammengesetzte Focaleigenschaft einer Parabel gegen eine confocale äussere Parabel.*

Genügt der Parameter μ des betrachteten hyperbolischen Paraboloides der Bedingung (vgl. § 27, zu II)

$$\mu = \frac{\beta + \gamma}{2},$$

so reducirt sich die Gleichung (58) auf:

$$r_0 - s_0 = 0,$$

in Worten:

III$_0$. *Für jeden Punkt des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides ist die Differenz der beiden gebrochenen Hauptfocaldistanzen gleich null.*

Mit dem Zusammenfall der beiden Hauptbrennpunkte B_0 und C_0 für $\gamma = \mu = \beta$ (vgl. § 28, 13) wird nach § 39, IV′ $r_0 = s_0$ und verschwinden damit beide Seiten der Gleichung (58), wie denn beim Uebergang von dem allgemeinen zu dem speciellen confocalen System § 28, 12′ die hyperbolischen Paraboloide in Wegfall kommen.

Anmerkung I.*)

Confocale Ellipsen und Hyperbeln.

---

1. **Begriff und Arten confocaler Systeme von Ellipsen und Hyperbeln** (vgl. § 2). Bedeuten x, y die Coordinaten eines laufenden Punktes der Ebene mit Bezug auf ein rechtwinkliges Axensystem Oxy, so stellt die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} = 1, \quad \alpha \geqq \beta, \quad \tau < \alpha$$

bei festem Werthe der Differenz $\alpha - \beta$ und veränderlichem τ ein System confocaler Ellipsen und Hyperbeln dar.

Für das *allgemeine confocale System* **):

$$(6^0) \qquad \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} = 1, \quad \alpha > \beta$$

sind die Brennpunkte B, B':

$$(7^0) \qquad x = \pm\sqrt{\alpha - \beta}, \quad y = 0$$

getrennt, für das *specielle confocale System:*

$$(6^{0\prime}) \qquad \frac{x^2 + y^2}{\alpha - \tau} = 1$$

fallen sie im Mittelpunkte O zusammen.

2. **Lage der Brennpunkte gegen die Scheitelpunkte** (vgl. § 3). Durch die Gleichung:

$$(9^0) \qquad (\alpha - \tau)(\beta - \tau)\left\{\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} - 1\right\} = 0, \quad \alpha > \beta,$$

dargestellt, enthält das allgemeine confocale System neben *eigentlichen Kegelschnitten* die *Doppelgeraden* $x^2 = 0$ und $y^2 = 0$, den Werthen $\tau = \alpha$ und

---

*) Die Anmerkungen I und II geben eine gedrängte Uebersicht derjenigen Sätze über Kegelschnitte, welche den in den Abschnitten I und II entwickelten Sätzen über Flächen zweiter Ordnung analog sind und dort als bekannt vorausgesetzt werden. Analoge Formeln sind hier und dort mit gleichen Nummern bezeichnet, hier zum Unterschiede mit dem oberen Index 0.

**) Vgl. Lindemann, Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch, Bd. I (Geometrie der Ebene) Leipzig 1876, S. 164.

$\tau = \beta$ entsprechend. Ein eigentlicher Kegelschnitt ist eine Ellipse oder Hyperbel, jenachdem seine Scheitelpunkte S, S':

$$x = \pm\sqrt{\alpha - \tau}, \quad y = 0$$

ausserhalb oder innerhalb der Brennpunkte liegen.

3. Die beiden Curvenschaaren des allgemeinen confocalen Systems (vgl. § 4). Wir bezeichnen den Parameter τ für die Ellipsen mit λ, für die Hyperbeln mit μ. Zu jenen rechnen wir als *Grenzform* $\lambda = -\infty$ (vgl. in Fig. 32 die Ellipsen $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$) die doppelte unendlich ferne Gerade $z^2 = 0$ (in homogenen Punktcoordinaten x, y, z dargestellt) und als *Grenzform* $\lambda = \beta$ (vgl. in Fig. 32: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) das zwischen B und B' liegende Stück der doppelten x-Axe, zu diesen als *Grenzform* $\mu = \beta$ (vgl. in Fig. 32 die Hyperbeln μ_3, μ_2, μ_1) die ausserhalb B und B' liegenden Stücke der doppelten x-Axe und als *Grenzform* $\mu = \alpha$ (vgl. Fig. 32: μ_1, μ_2, μ_3) die doppelte y-Axe. Bei dieser Auffassung zerfällt das confocale System (9⁰) in zwei Schaaren je gleichnamiger Kegelschnitte:

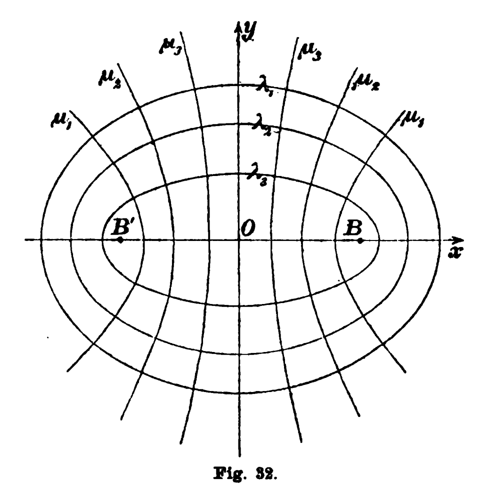


Fig. 32.

(12⁰) *Ellipsen:*

$$\lambda = -\infty: \; z^2 = 0,$$

$$-\infty < \lambda < \beta: \; \frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\beta - \lambda} = 1,$$

$$\lambda = \beta: \; \frac{x^2}{\alpha - \beta} \leqq 1, \; y^2 = 0.$$

Hyperbeln:

$$\mu = \beta: \; \frac{x^2}{\alpha - \beta} \geqq 1, \; y^2 = 0,$$

$$\beta < \mu < \alpha: \; \frac{x^2}{\alpha - \mu} + \frac{y^2}{\beta - \mu} = 1,$$

$$\mu = \alpha: \; x^2 = 0.$$

Durch jeden Punkt x, y der Ebene gehen zwei im Sinne der Tabelle (12⁰) ungleichnamige Kegelschnitte, deren Parameter λ, μ die Wurzeln der in τ quadratischen Gleichung (9⁰) sind.

4. Die beiden Curvenschaaren des speciellen confocalen Systems (vgl. § 5): Nach Ausführung der Substitution:

(13⁰) $\quad \alpha = \alpha + \varepsilon\alpha', \quad \beta = \alpha + \varepsilon\beta', \; (\alpha' > \beta'), \quad \mu = \alpha + \varepsilon\mu'$

nähert sich die Tabelle (12⁰) bei unbegrenzt abnehmendem ε der Grenzform (vgl. Fig. 32'):

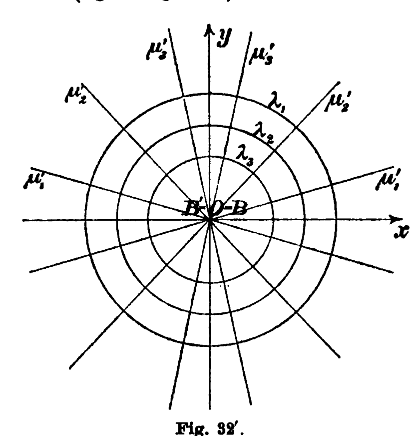


Fig. 32'.

(12⁰') *Kreise:*

$$\lambda = -\infty:\ z^2 = 0,$$

$$-\infty < \lambda < \alpha:\ \frac{x^2 + y^2}{\alpha - \lambda} = 1,$$

$$\lambda = \alpha:\ x^2 = 0,\quad y^2 = 0.$$

Linienpaare:

$$\mu' = \beta':\ y^2 = 0,$$

$$\beta' < \mu' < \alpha':\ \frac{x^2}{\alpha' - \mu'} + \frac{y^2}{\beta' - \mu'} = 0,$$

$$\mu' = \alpha':\ x^2 = 0.$$

Durch jeden Punkt x, y der Ebene, mit Ausnahme des Punktes 0, gehen zwei im Sinne der Tabelle (12⁰') ungleichnamige Kegelschnitte, deren Parameter λ und μ' die Wurzeln der linearen Gleichungen:

$$(9^0{}')\qquad x^2 + y^2 - (\alpha - \lambda) = 0$$

$$(14^0{}')\qquad (\beta' - \mu')x^2 + (\alpha' - \mu')y^2 = 0$$

sind.

5. **Definition der elliptischen Coordinaten** (vgl. § 6). Die Parameter λ, μ der zwei ungleichnamigen Kegelschnitte (12⁰), welche durch einen Punkt der Ebene hindurchgehen, heissen dessen elliptische Coordinaten. Zwischen gewöhnlichen Coordinaten x, y und elliptischen Coordinaten λ, μ eines Punktes besteht identisch in τ die Gleichung:

$$(15^0)\qquad (\alpha - \tau)(\beta - \tau)\left\{\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} - 1\right\} = -(\tau - \lambda)(\tau - \mu).$$

Aus ihr folgt mit $\tau = \lambda, \mu$:

$$(16^0)\qquad \begin{cases} (\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)\left\{\dfrac{x^2}{\alpha - \lambda} + \dfrac{y^2}{\beta - \lambda} - 1\right\} = 0, \\ (\alpha - \mu)(\beta - \mu)\left\{\dfrac{x^2}{\alpha - \mu} + \dfrac{y^2}{\beta - \mu} - 1\right\} = 0 \end{cases}$$

und mit $\tau = \alpha, \beta$:

$$(17^0)\qquad x^2 = \frac{(\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)}{(\alpha - \beta)},\quad y^2 = \frac{(\beta - \lambda)(\beta - \mu)}{(\beta - \alpha)}.$$

6. **Weitere Relationen zwischen x, y und λ, μ** (vgl. § 7) sind die folgenden:

$$(22^0)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{(\alpha - \lambda)^2} + \dfrac{y^2}{(\beta - \lambda)^2} = \dfrac{(\mu - \lambda)}{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)}, \\ \dfrac{x^2}{(\alpha - \mu)^2} + \dfrac{y^2}{(\beta - \mu)^2} = \dfrac{(\lambda - \mu)}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)}. \end{cases}$$

$$(23^0) \qquad \frac{x^2}{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)} + \frac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)} = 0 .$$

$$(22^0, y) \qquad \frac{(\alpha-\beta)x^2}{(\alpha-\lambda)^2} - 1 = -\frac{\mu-\lambda}{\alpha-\lambda}, \quad \frac{(\alpha-\beta)x^2}{(\alpha-\mu)^2} - 1 = -\frac{\lambda-\mu}{\alpha-\mu}.$$

$$(23^0, y) \qquad \frac{(\alpha-\beta)x^2}{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)} - 1 = 0 .$$

7. **Elliptische Coordinaten eines Linienelementes** (vgl. § 8). Zwischen den gewöhnlichen Coordinaten x, y, dx, dy und den elliptischen Coordinaten $\lambda, \mu, d\lambda, d\mu$ eines Linienelementes besteht, aus (15^0) hervorgehend, identisch in τ die Gleichung:

$$(24^0) \quad (\alpha-\tau)(\beta-\tau)\left\{\frac{2x\,dx}{\alpha-\tau} + \frac{2y\,dy}{\beta-\tau}\right\} = (\tau-\lambda)(\tau-\mu)\left\{\frac{d\lambda}{\tau-\lambda} + \frac{d\mu}{\tau-\mu}\right\}.$$

Aus ihr folgt mit $\tau = \lambda, \mu$:

$$(25^0) \qquad \begin{cases} (\lambda-\mu)d\lambda = (\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)\left\{\frac{2x\,dx}{\alpha-\lambda} + \frac{2y\,dy}{\beta-\lambda}\right\} \\ (\mu-\lambda)d\mu = (\alpha-\mu)(\beta-\mu)\left\{\frac{2x\,dx}{\alpha-\mu} + \frac{2y\,dy}{\beta-\mu}\right\} \end{cases}$$

und mit $\tau = \alpha, \beta$:

$$(26^0) \qquad \begin{cases} -2(\alpha-\beta)x\,dx = (\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)\left\{\frac{d\lambda}{\alpha-\lambda} + \frac{d\mu}{\alpha-\mu}\right\}, \\ -2(\beta-\alpha)y\,dy = (\beta-\lambda)(\beta-\mu)\left\{\frac{d\lambda}{\beta-\lambda} + \frac{d\mu}{\beta-\mu}\right\}. \end{cases}$$

Nach (23^0) sind die elliptischen Coordinaten *orthogonale* Coordinaten.

8. Als **Axen ξ, η eines Punktes P im elliptischen Coordinatensystem** (vgl. § 9) der Ebene bezeichnen wir die positiven Tangenten (vgl. Anm. IV, 6) der Coordinatenlinien

$$\mu = \text{const.}, \ \lambda = \text{const.}$$

im Punkte P, zugleich die positiven Normalen der Coordinatenlinien

$$\lambda = \text{const.}, \ \mu = \text{const.}$$

(vgl. Fig. 33). Sie haben gegen das Coordinatensystem Oxy die Richtungscosinus:

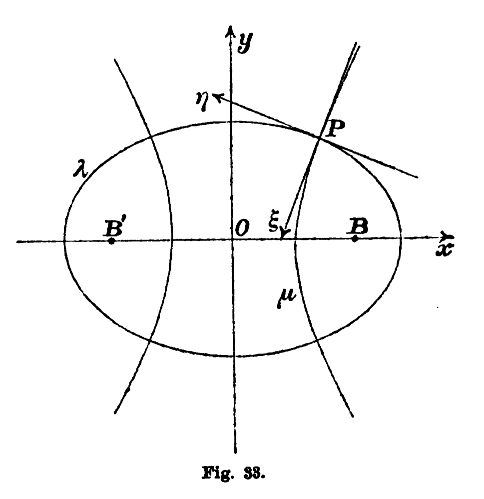


Fig. 33.

(29^0)

	x	y
ξ	$-\frac{x}{2l(\alpha-\lambda)}$	$-\frac{y}{2l(\beta-\lambda)}$
η	$-\frac{x}{2m(\alpha-\mu)}$	$-\frac{y}{2m(\beta-\mu)}$,

worin:

$$(28^0)\qquad l=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu-\lambda}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)}},\quad m=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)}}.$$

Dabei ist ξ die innere Normale der Ellipse λ und η die äussere (nach der convexen Seite laufende) Normale der Hyperbel μ.

Ein Linienelement mit den elliptischen Coordinaten λ, μ, $d\lambda$, $d\mu$ hat die absolute Länge:

$$(30^0)\qquad ds=\sqrt{l^2d\lambda^2+m^2d\mu^2},$$

und seine Richtungscosinus p, q gegen die Axen ξ, η des Punktes λ, μ sind:

$$(31^0)\qquad p=\frac{l\,d\lambda}{ds},\quad q=\frac{m\,d\mu}{ds}.$$

9. **Die Schnittpunkte einer geraden Linie mit dem confocalen System** (vgl. § 10): I. Hat eine Gerade mit den beiden Grenzformen einer der beiden Kegelschnittschaaren (12^0) je einen Punkt P_1 und P_2 gemein, so schneidet sie jeden eigentlichen Kegelschnitt derselben Schaar in zwei reellen Punkten, die durch P_1 und P_2 getrennt sind.

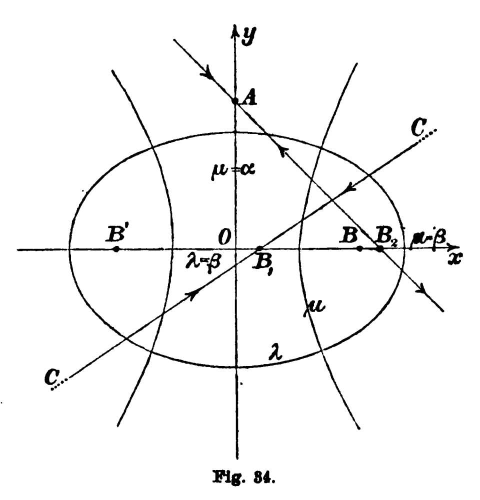


Fig. 34.

II. Schneidet eine Gerade (vgl. Fig. 34) die beiden Grenzformen $\lambda=-\infty$ und $\lambda=\beta$ der Ellipsen λ je in einem Punkte C und B_1, so ist für alle von C nach B_1 gerichteten Elemente der beiden Abschnitte CB_1: $d\lambda>0$.

III. Schneidet eine Gerade (vgl. Fig. 34) die beiden Grenzformen $\mu=\beta$ und $\mu=\alpha$ der Hyperbeln μ je in einem Punkte B_2 und A, so ist für alle von B_2 nach A gerichteten Elemente der beiden Abschnitte B_2A: $d\mu>0$.

10. **Das Focallinienpaar eines Punktes in dem confocalen System** (vgl. §§ 11; 12). Das den Punkt $P=x, y$ mit den Brennpunkten B, B' des confocalen Systems (9^0) verbindende Linienpaar hat in laufenden Coordinaten X, Y die Gleichung:

$$(32^0)\qquad \frac{\{(Y-y)x-(X-x)y\}^2}{\alpha-\beta}-(Y-y)^2=0$$

oder mit Benutzung der identischen Gleichungen Anm. I, 6 auf die Axen ξ, η des Punktes P transformirt:

$$(34^0)\qquad (\beta-\lambda)(\beta-\mu)\left\{\frac{\xi^2}{\beta-\lambda}+\frac{\eta^2}{\beta-\mu}\right\}=0.$$

Das Geradenpaar hat also die Axen ξ, η als Halbirungslinien.

Die Gleichung (34^0) ist ein specieller Fall der Gleichung:

$$(\tau-\lambda)(\tau-\mu)\left\{\frac{\xi^2}{\tau-\lambda}+\frac{\eta^2}{\tau-\mu}\right\}=0$$

des Tangentenpaares vom Punkte λ, μ an den Kegelschnitt τ des Systems (9⁰).

11. **Die Focalhalbstrahlen eines Punktes** (vgl. § 13). Unter der Charakteristik eines Focalhalbstrahles im Punkte P verstehen wir die Nebeneinanderstellung $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m})$ der Vorzeichen seiner Richtungscosinus gegen die Axen ξ, η. Die Werthe dieser Richtungscosinus sind alsdann:

$$(36^0)\qquad p=\mathfrak{l}\sqrt{\frac{\beta-\lambda}{\mu-\lambda}},\qquad q=\mathfrak{m}\sqrt{\frac{\beta-\mu}{\lambda-\mu}}.$$

Wir benennen die den vier Charakteristiken entsprechenden Focalhalbstrahlen in folgender Weise:

$$(37^0)\qquad \begin{cases}+f_1=(+\,+), & +f_2=(+\,-),\\ -f_1=(-\,-), & -f_2=(-\,+).\end{cases}$$

Der Winkel zwischen $+f_1$ und $+f_2$ wird von der positiven ξ-Axe, zwischen $+f_1$ und $-f_2$ von der positiven η-Axe halbirt.

Beim Durchgang des laufenden Punktes $P=\lambda$, μ durch die y-Axe vertauschen die Focalhalbstrahlen $\pm f_1$ und $\pm f_2$ sprungweise ihre Bezeichnung. Beim Eintritt des Punktes in die Abschnitte $\lambda=\beta$ oder $\mu=\beta$ der x-Axe fallen je zwei Focalhalbstrahlen in folgender Weise zusammen:

$$(40^0)\qquad \lambda=\beta\begin{cases}+f_1=-f_2=(0\,+),\\ -f_1=+f_2=(0\,-),\end{cases}\qquad \mu=\beta\begin{cases}+f_1=+f_2=(+\,0),\\ -f_1=-f_2=(-\,0).\end{cases}$$

12. **Das Focallinienelement** (vgl. § 14). Sind λ, μ, $d\lambda$, $d\mu$ die elliptischen Coordinaten, $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m})$ die Charakteristik und ds die absolute Länge eines Focallinienelementes, so ist:

$$(42^0)\qquad ds=\frac{\mathfrak{l}\,d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda}}+\frac{\mathfrak{m}\,d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}}.$$

In dieser Formel werden für $\mu=\alpha$ das zweite und für $\lambda=\mu=\beta$ beide Glieder unbestimmt.

13. **Aenderung der Charakteristik des Linienelementes längs einer Focallinie** (vgl. § 14). Für eine nicht in der x-Axe liegende Focallinie seien A, B, C die Schnittpunkte mit der y-Axe, x-Axe und unendlich fernen Geraden; B ist zugleich einer der beiden Brennpunkte B, B'. Längs der durch die drei Punkte markirten Abschnitte der Focallinie ist die Charakteristik des Linienelementes die folgende:

$$(43^0)\qquad \overset{C}{\bullet}\;\text{-}\text{-}\underset{-\,-}{\overset{+\,+}{\longleftrightarrow}}\text{-}\text{-}\;\overset{A}{\bullet}\;\text{-}\text{-}\underset{-\,+}{\overset{+\,-}{\longleftrightarrow}}\text{-}\text{-}\;\overset{B}{\bullet}\;\text{-}\text{-}\underset{+\,-}{\overset{-\,+}{\longleftrightarrow}}\text{-}\text{-}\;\overset{C}{\bullet},$$

längs der in die x-Axe fallenden Focallinie ebenso:

$$\overset{C}{\bullet}\;\text{-}\text{-}\underset{-\,0}{\overset{+\,0}{\longleftrightarrow}}\text{-}\text{-}\;\overset{B'}{\bullet}\;\underset{0\,-}{\overset{0\,+}{\longleftrightarrow}}\text{-}\text{-}\;\overset{A}{\bullet}\;\text{-}\text{-}\underset{0\,+}{\overset{0\,-}{\longleftrightarrow}}\text{-}\text{-}\;\overset{B}{\bullet}\;\text{-}\text{-}\underset{+\,0}{\overset{-\,0}{\longleftrightarrow}}\text{-}\text{-}\;\overset{C}{\bullet}.$$

14. **Die Lage der Brennpunkte auf den zwei Focallinien eines Punktes** (vgl. § 15). Aus der Vergleichung von (37⁰) und (43⁰) ergiebt sich, dass die Reihenfolge der Punkte P, A_i, B_i $(i=1, 2)$ auf den beiden

Focallinien f_i eines Punktes P, in der Richtung der positiven Focalhalbstrahlen $+f_i$, die folgende ist:

(44⁰) $$f_1 = PA_1B_1, \quad f_2 = A_2PB_2 \text{ oder } PB_2A_2.$$

I. Die positiven Focalhalbstrahlen laufen von P nach den Brennpunkten hin.

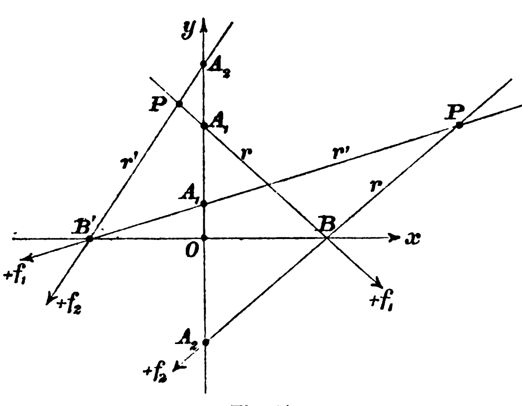


Fig. 35.

II. Der Focalhalbstrahl $+f_1$ läuft stets nach dem mit P (in Bezug auf die y-Axe) ungleichseitigen, $+f_2$ nach dem mit P gleichseitigen Brennpunkt. Hiermit ist bei gegebener Zeichnung der beiden Focallinien die Bezeichnung der vier Focalhalbstrahlen durch die Symbole (37⁰) bestimmt (vgl. Fig. 35, wo zwei verschiedene Lagen von P angenommen sind).

15. Die Länge der Focaldistanzen eines Punktes (vgl. §§ 19; 21). Die beiden Focaldistanzen:

$$r = PB \quad \text{und} \quad r' = PB'$$

eines Punktes $P = \lambda, \mu$ (vgl. Fig. 35), seine absoluten Entfernungen von den beiden Brennpunkten B und B', sind:

(53⁰) $$\begin{cases} r = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu}, \\ r' = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu}, \end{cases}$$

wo $\sqrt{\alpha - \mu}$ positiv oder negativ ist, jenachdem P mit B oder mit B' gleichseitig liegt.

16. Die einfachen Focaleigenschaften der Ellipse und Hyperbel (vgl. §§ 22—25). Die Summe der beiden Focaldistanzen eines Punktes λ, μ:

(55⁰) $$r + r' = 2\sqrt{\alpha - \lambda}$$

ist von μ, die Differenz

(59⁰) $$r' - r = 2\sqrt{a - \mu}$$

von λ unabhängig.

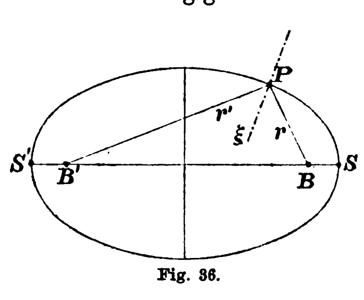


Fig. 36.

I. *Für jeden Punkt der Ellipse ist die Summe der beiden Focaldistanzen* $(r + r')$ *gleich der Hauptaxenlänge* (SS') *der Ellipse und wird der Winkel beider Distanzen von der Normale* (ξ) *der Ellipse halbirt* (vgl. Fig. 36).

I'. Ist BPB' ein in B und B' befestigter Faden, der in P mittels eines über das Papier gleitenden Stiftes gespannt wird, so beschreibt der Stift die Ellipse (vgl. Fig. 36).

II. *Für jeden Punkt der Hyperbel ist die Differenz der beiden Focaldistanzen* ($r' - r$) *ihrem absoluten Werthe nach gleich der Hauptaxenlänge* (SS') *der Hyperbel und wird der Nebenwinkel beider Distanzen von der Normale* (η) *der Hyperbel halbirt* (vgl. Fig. 37).

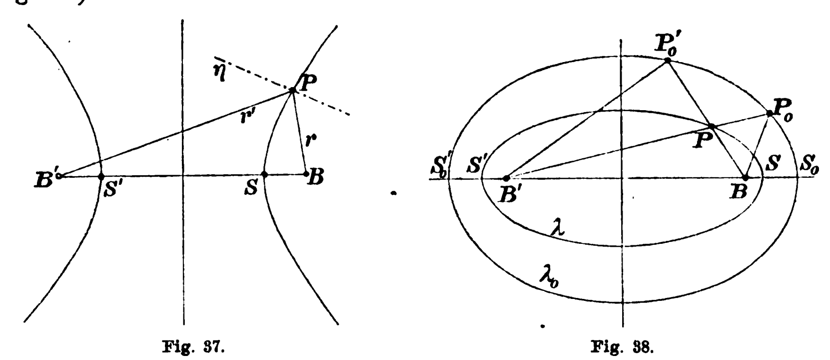


Fig. 37. Fig. 38.

17. Die zusammengesetzten Focaleigenschaften der Ellipse und Hyperbel. Aus den einfachen Focaleigenschaften I und II leiten wir kurz die Formeln für die zusammengesetzten Focaleigenschaften der Ellipse und Hyperbel ab, welche sich auf je zwei confocale Kegelschnitte beziehen und deren Ausdruck in Worten bereits in § 22, IV; § 24, IV und V; § 25, IV gegeben ist.

Es seien λ und λ_0 zwei Ellipsen des confocalen Systems (12^0) und sei λ_0 die äussere von beiden (vgl. Fig. 38). Die Rückwärtsverlängerungen der Focaldistanzen PB und PB' eines laufenden Punktes P der Ellipse λ mögen die Ellipse λ_0 bezüglich in P_0' und P_0 schneiden. Wir verbinden P_0' und P_0 mit B' und B. Nach (55^0) ist, wenn wir mit zwei nebeneinander gestellten Buchstaben P_0B' allgemein die absolute Entfernung der Punkte P_0 und B' bezeichnen:

$$P_0B' + P_0B = 2\sqrt{\alpha - \lambda_0}, \quad P_0'B + P_0'B' = 2\sqrt{\alpha - \lambda_0}$$
$$PB' + PB = 2\sqrt{\alpha - \lambda}$$

und hieraus, wenn wir mit drei nebeneinander gestellten Buchstaben PP_0B allgemein die absolute Länge der gebrochenen Linie von P über P_0 nach B bezeichnen und beachten, dass $2\sqrt{\alpha - \lambda_0} = S_0S_0'$, $2\sqrt{\alpha - \lambda} = SS'$ ist:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} PP_0B - PB = 2 \cdot SS_0, \\ PP_0'B' - PB' = 2 \cdot SS_0 \end{cases}$$

(vgl. § 24, IV).

Es seien μ und μ_0 zwei Hyperbeln des confocalen Systems (12^0) und sei μ_0 die äussere von beiden (auf der convexen Seite von μ gelegene). Von den Focaldistanzen PB und PB' eines laufenden Punktes P der Hyperbel μ schneidet die erste (vgl. Fig. 39), nach dem

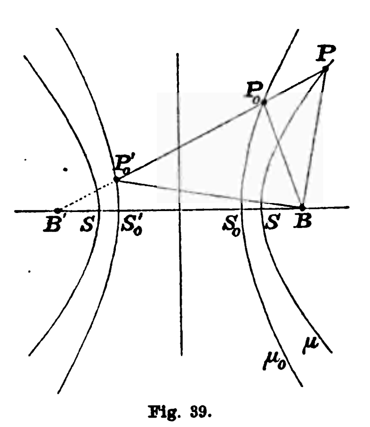


Fig. 39.

gleichseitigen Brennpunkte B laufende, die Hyperbel μ_0 in keinem, die andere aber in einem gleichseitigen Punkte P_0 und einem ungleichseitigen P_0'. Wir verbinden P_0 und P_0' mit B. Nach (59^0) ist:

$$P_0B' - P_0B = 2\sqrt{\alpha - \mu_0}, \quad P_0'B - P_0'B' = 2\sqrt{\alpha - \mu_0}$$
$$PB' - PB = 2\sqrt{\alpha - \mu}$$

und hieraus wie vorhin:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} PP_0B - PB = 2 \cdot SS_0 \\ [PP_0'B - PB = SS' + S_0S_0'] \end{cases}$$

(vgl. § 24, V).

Es sei λ eine Ellipse und μ_0 eine Hyperbel des confocalen Systems (12^0). Von den Focaldistanzen P_iB und P_iB' eines laufenden „inneren" Punktes P_i der Ellipse λ (innerhalb des einen Zweiges der Hyperbel μ_0) schneidet (vgl. Fig. 40) die erste die Hyperbel μ_0 in keinem, die andere in einem gleichseitigen Punkte P_0 und einem ungleichseitigen Punkte P_0'. Wir verbinden P_0 und P_0' mit B. Nach (55^0) und (59^0) ist:

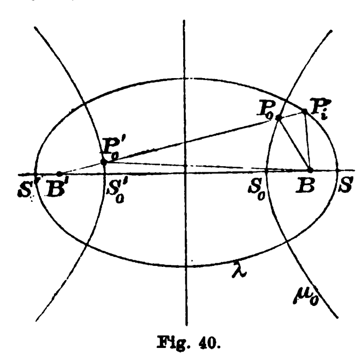


Fig. 40.

$$P_0B' - P_0B = 2\sqrt{\alpha - \mu_0},$$
$$P_0'B - P_0'B' = 2\sqrt{\alpha - \mu_0},$$
$$P_iB' + P_iB = 2\sqrt{\alpha - \lambda}$$

und hieraus:

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} P_iP_0B + P_iB = 2 \cdot SS_0 \\ [P_iP_0'B + P_iB = SS' + S_0S_0'] \end{cases}$$

(vgl. § 22, IV).

Es sei μ eine Hyperbel und λ_0 eine Ellipse des confocalen Systems (12^0). Von den Focaldistanzen P_iB und P_iB' eines laufenden „inneren" Punktes P_i der Hyperbel μ (innerhalb der Ellipse λ) schneiden die Rückwärtsverlängerungen die Ellipse λ_0 in P_0' und P_0. Wir verbinden P_0 und P_0' mit B und B'. Nach (55^0) und (59^0) ist:

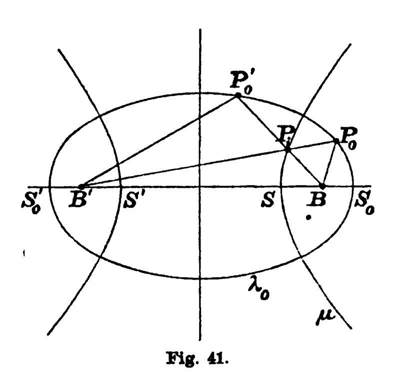


Fig. 41.

$$P_0B' + P_0B = 2\sqrt{\alpha - \lambda_0},$$
$$P_0'B + P_0'B' = 2\sqrt{\alpha - \lambda_0},$$
$$P_iB' - P_iB = 2\sqrt{\alpha - \mu}$$

und hieraus:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} P_iP_0B + P_iB = 2 \cdot SS_0, \\ [P_iP_0'B' + P_iB' = SS' + S_0S_0']. \end{cases}$$

Durch Subtraction dieser beiden Gleichungen und Benutzung der letzten der drei unmittelbar vorhergehenden folgt weiter:

$$\text{(IV')} \qquad P_iP_0'B' - P_iP_0B = SS' \qquad \text{(vgl. § 25, IV).}$$

Anmerkung II.

Confocale Parabeln.

1. **Begriff des confocalen Systems von Parabeln** (vgl. §§ 26; 27). Die Gleichung:

$$(6^0) \qquad \frac{y^2}{\beta - \tau} + 2x + \tau = 0$$

stellt bei veränderlichem τ ein System confocaler Parabeln dar mit dem Brennpunkte B:

$$(7^0) \qquad x = -\frac{\beta}{2}, \quad y = 0.$$

Die positive x-Axe nehmen wir *nach rechts gerichtet* an. In der Form:

$$(9^0) \qquad (\beta - \tau)\left\{\frac{y^2}{\beta - \tau} + 2x + \tau\right\} = 0$$

dargestellt, umfasst das System neben *eigentlichen Parabeln* die *Doppelgerade* $y^2 = 0$, dem Werthe $\tau = \beta$ entsprechend. Eine eigentliche Parabel τ ist eine linke (links von ihrer Scheiteltangente $x = -\frac{\tau}{2}$ gelegene) oder rechte, jenachdem ihr Scheitelpunkt S: $x = -\frac{\tau}{2}$, $y = 0$ rechts oder links vom Brennpunkte B liegt.

2. **Die beiden Parabelschaaren des confocalen Systems** (vgl. § 28). Wir bezeichnen den Parameter τ des Systems für die linken Parabeln mit λ, für die rechten mit μ. Zu jenen (vgl. Fig. 42: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) rechnen wir als Grenzform $\lambda = \beta$ das von B nach links laufende, zu diesen (Fig. 42: μ_3, μ_2, μ_1) als Grenzform $\mu = \beta$ das von B nach rechts laufende Stück der Doppelgeraden $y^2 = 0$ hinzu; zu den linken und rechten Parabeln je auch die doppelte unendlich ferne Gerade $z^2 = 0$ (in homogenen Punktcoordinaten x, y, z dargestellt) als Grenzform $\lambda = -\infty$ und $\nu = +\infty$. Bei dieser Auffassung zerfällt das confocale System (9^0) in zwei Schaaren je gleichnamiger Parabeln:

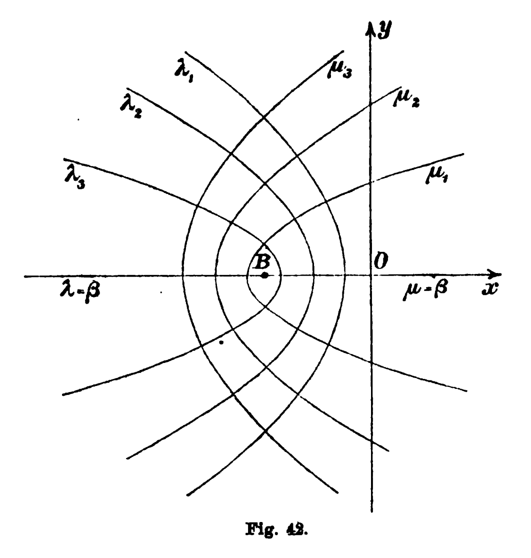


Fig. 42.

(12⁰) *Linke Parabeln:*

$$\lambda = -\infty: \ z^2 = 0,$$

$$-\infty < \lambda < \beta: \ \frac{y^2}{\beta - \lambda} + 2x + \lambda = 0,$$

$$\lambda = \beta: \ x \leqq -\frac{\beta}{2}, \quad y^2 = 0.$$

Rechte Parabeln:

$$\mu = \beta: \ x \geqq -\frac{\beta}{2}, \quad y^2 = 0,$$

$$\beta < \mu < +\infty: \ \frac{y^2}{\beta - \mu} + 2x + \mu = 0,$$

$$\mu + = \infty: \ z^2 = 0.$$

Je eine linke und eine rechte Parabel, deren Parameter λ und μ die Summe 2β haben, sind einander congruent.

Durch jeden Punkt x, y der Ebene gehen zwei im Sinne der Tabelle (12⁰) ungleichnamige Parabeln, deren Parameter λ, μ die Wurzeln der in τ quadratischen Gleichung (9⁰) sind. Eine Ausnahme hiervon bietet der unendlich ferne Punkt der x-Axe, durch den alle Parabeln des Systems (9⁰) hindurchgehen.

3. **Definition der parabolischen Coordinaten** (vgl. § 29). Die Parameter λ, μ der zwei ungleichnamigen Parabeln (12⁰), welche durch einen Punkt der Ebene gehen, heissen dessen parabolische Coordinaten. Zwischen parabolischen Coordinaten λ, μ und gewöhnlichen Coordinaten x, y eines Punktes besteht identisch in τ die Gleichung:

$$(15^0) \qquad (\beta - \tau)\left\{\frac{y^2}{\beta - \tau} + 2x + \tau\right\} = -(\tau - \lambda)(\tau - \mu).$$

Aus ihr folgt mit $\tau = \lambda, \mu$:

$$(16^0) \qquad \begin{cases} (\beta - \lambda)\left\{\frac{y^2}{\beta - \lambda} + 2x + \lambda\right\} = 0, \\ (\beta - \mu)\left\{\frac{y^2}{\beta - \mu} + 2x + \mu\right\} = 0 \end{cases}$$

und mit Vergleichung der Coefficienten von τ und mit Substitution von β für τ:

$$(17^0) \qquad \begin{cases} x = \frac{\beta - \lambda - \mu}{2}, \\ y^2 = -(\beta - \lambda)(\beta - \mu). \end{cases}$$

4. **Weitere Relationen zwischen x, y und λ, μ** (vgl. § 30) sind die folgenden:

$$(22^0) \qquad \frac{y^2}{(\beta - \lambda)^2} + 1 = \frac{\mu - \lambda}{\beta - \lambda}, \quad \frac{y^2}{(\beta - \mu)^2} + 1 = \frac{\lambda - \mu}{\beta - \mu}.$$

$$(23^0) \qquad \frac{y^2}{(\beta - \lambda)(\beta - \mu)} + 1 = 0.$$

$$(22^0, y) \quad -2(\beta - \lambda) + (2x + \beta) = \lambda - \mu, \quad -2(\beta - \mu) + (2x + \beta) = \mu - \lambda.$$

$$(23^0, y) \qquad -(\beta - \lambda) - (\beta - \mu) + (2x + \beta) = 0.$$

5. Die parabolischen Coordinaten eines Linienelementes (vgl. § 31). Zwischen den gewöhnlichen Coordinaten x, y, dx, dy und den parabolischen Coordinaten $\lambda, \mu, d\lambda, d\mu$ eines Linienelementes besteht, aus (15^0) hervorgehend, identisch in τ die Gleichung:

$$(24^0)\quad (\beta-\tau)\left\{\frac{2y\,dy}{\beta-\tau}+2\,dx\right\}=(\tau-\lambda)(\tau-\mu)\left\{\frac{d\lambda}{\tau-\lambda}+\frac{d\mu}{\tau-\mu}\right\}.$$

Aus ihr folgt mit $\tau=\lambda, \mu$:

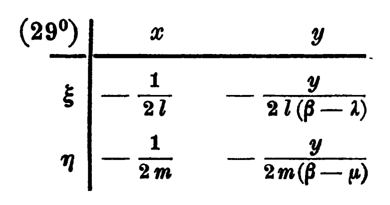
$$(25^0)\quad \begin{cases}(\lambda-\mu)\,d\lambda=(\beta-\lambda)\left\{\dfrac{2y\,dy}{\beta-\lambda}+2\,dx\right\},\\ (\mu-\lambda)\,d\mu=(\beta-\mu)\left\{\dfrac{2y\,dy}{\beta-\mu}+2\,dx\right\}\end{cases}$$

und mit Vergleichung der Coefficienten von τ und mit $\tau=\beta$:

$$(26^0)\quad \begin{cases}2\,dx=-\{d\lambda+d\mu\},\\ 2y\,dy=(\beta-\lambda)(\beta-\mu)\left\{\dfrac{d\lambda}{\beta-\lambda}+\dfrac{d\mu}{\beta-\mu}\right\}.\end{cases}$$

Nach (23^0) sind die parabolischen Coordinaten *orthogonale* Coordinaten.

6. Als **Axen ξ, η eines Punktes P im parabolischen Coordinatensytem** der Ebene (vgl. § 32) bezeichnen wir die positiven Tangenten (vgl. Anm. IV, 6) der Coordinatenlinien $\mu=$ const., $\lambda=$ const. im Punkte P, zugleich die positiven Normalen der Coordinatenlinien $\lambda=$ const., $\mu=$ const. (vgl. Fig. 43). Sie haben gegen das Coordinatensystem Oxy die Richtungscosinus:



(29^0)	x	y
ξ	$-\dfrac{1}{2l}$	$-\dfrac{y}{2l(\beta-\lambda)}$
η	$-\dfrac{1}{2m}$	$-\dfrac{y}{2m(\beta-\mu)}$

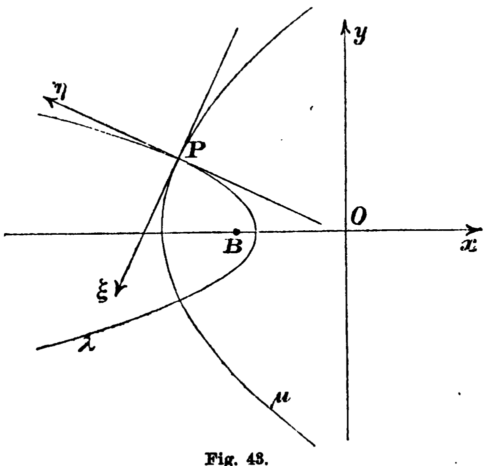


Fig. 43.

worin:

$$(28^0)\quad l=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu-\lambda}{\beta-\lambda}},\quad m=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{\beta-\mu}}.$$

Dabei ist ξ die innere Normale der linken Parabel λ und η die äussere der rechten Parabel μ.

Ein Linienelement mit den parabolischen Coordinaten $\lambda, \mu, d\lambda, d\mu$ hat die absolute Länge:

$$(30^0)\quad ds=\sqrt{l^2\,d\lambda^2+m^2\,d\mu^2}$$

und seine Richtungscosinus p, q gegen die Axen ξ, η des Punktes λ, μ sind:

$$(31^0)\quad p=\frac{l\,d\lambda}{ds},\quad q=\frac{m\,d\mu}{ds}.$$

7. **Die Schnittpunkte einer geraden Linie mit dem confocalen System** (vgl. § 33): I. Hat eine Gerade mit den beiden Grenzformen einer der beiden Parabelschaaren (12^0) je einen Punkt P_1 und P_2 gemein, so schneidet sie jede eigentliche Parabel derselben Schaar in zwei reellen Punkten, die durch P_1 und P_2 getrennt sind.

II. Schneidet eine Gerade die beiden Grenzformen $\lambda = -\infty$ und $\lambda = \beta$ der linken Parabeln λ je in einem Punkte C_1 und B_1, so ist für alle von C_1 nach B_1 gerichteten Elemente der beiden Abschnitte $C_1 B_1$: $d\lambda > 0$.

III. Schneidet eine Gerade die beiden Grenzformen $\mu = \beta$ und $\mu = +\infty$ der rechten Parabeln μ je in einem Punkte B_2 und C_2, so ist für alle von B_2 nach C_2 gerichteten Elemente der beiden Abschnitte $B_2 C_2$: $d\mu > 0$.

IV. Für alle der positiven x-Axe entgegengesetzt (nach dem Punkte $x_{-\infty}$) gerichteten Elemente einer zur x-Axe parallelen Geraden ist $d\lambda > 0$ und $d\mu > 0$.

Auf der x-Axe selbst ist von $x_{+\infty}$ bis B: $d\lambda > 0$, $d\mu = 0$, von B bis $x_{-\infty}$: $d\lambda = 0$, $d\mu > 0$.

8. **Das Focallinienpaar eines Punktes in dem confocalen System** (vgl. § 34). Das Linienpaar, welches den Punkt $P = x, y$ mit dem Brennpunkte B des confocalen Systems und dem unendlich fernen Punkte der x-Axe verbindet, hat in laufenden Coordinaten X, Y die Gleichung:

$$(32^0) \qquad -2(X-x)(Y-y)y + (2x+\beta)(Y-y)^2 = 0$$

oder unter Benutzung der identischen Gleichungen Anm. II, 4 auf die Axen ξ, η des Punktes P transformirt:

$$(34^0) \qquad (\beta-\lambda)(\beta-\mu)\left\{\frac{\xi^2}{\beta-\lambda} + \frac{\eta^2}{\beta-\mu}\right\} = 0.$$

Das Geradenpaar hat also die Axen ξ, η als Halbirungslinien.

Die Gleichung (34^0) ist ein specieller Fall der Gleichung.

$$(\tau-\lambda)(\tau-\mu)\left\{\frac{\xi^2}{\tau-\lambda} + \frac{\eta^2}{\tau-\mu}\right\} = 0$$

des Tangentenpaares vom Punkte λ, μ an die Parabel τ des Systems (9^0).

9. **Die Focalhalbstrahlen eines Punktes** (vgl. § 35). Die Richtungscosinus eines Focalhalbstrahles des Punktes $P = \lambda, \mu$ gegen die Axen ξ, η sind:

$$(36^0) \qquad p = \mathfrak{l}\sqrt{\frac{\beta-\lambda}{\mu-\lambda}}, \qquad q = \mathfrak{m}\sqrt{\frac{\beta-\mu}{\lambda-\mu}},$$

wo $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m})$ die Charakteristik des Focalhalbstrahles im Punkte P ist (vgl. Anm. I, 11). Wir benennen die vier Focalhalbstrahlen in der Weise:

$$(37^0) \qquad \begin{cases} +f_1 = (++), & +f_2 = (+-), \\ -f_1 = (--), & -f_2 = (-+). \end{cases}$$

und haben die Anordnung und die Specialfälle, wie in Anm. I, 11.

10. **Das Focallinienelement** (vgl. § 36). Sind $\lambda, \mu, d\lambda, d\mu$ die parabolischen Coordinaten eines Linienelementes, $(\mathfrak{l}, \mathfrak{m})$ seine Charakteristik und ds seine absolute Länge, so ist:

$$(42^0) \qquad ds = \frac{1}{2}(\mathfrak{l}\,d\lambda + \mathfrak{m}\,d\mu).$$

Für eine nicht der x-Axe parallele Focallinie seien B und C die Schnittpunkte mit der x-Axe und der unendlich fernen Geraden; B ist zugleich der Brennpunkt. Längs der durch beide Punkte markirten Abschnitte der Focallinie ist die Charakteristik des Linienelementes die folgende:

(43⁰) C - - - - ← $\overset{+-}{\longrightarrow}_{-+}$ - - - - B - - - - ← $\overset{-+}{\longrightarrow}_{+-}$ - - - - C,

für eine der x-Axe parallele Focallinie ebenso:

(43⁰) $C = B$ - - - - ← $\overset{--}{\longrightarrow}_{++}$ - - - - $B = C$

und für die x-Axe selbst:

C - - ← $\overset{0-}{\longrightarrow}_{0+}$ - - B - - ← $\overset{-0}{\longrightarrow}_{+0}$ - - C.

11. Die Lage der Punkte B, $x_{-\infty}$ auf den Focalhalbstrahlen eines Punktes (vgl. § 37). Der positive Focalhalbstrahl $+f_1$ führt von P nach dem Punkte $x_{-\infty}$, der positive Focalhalbstrahl $+f_2$ von P nach B (vgl. Fig. 44).

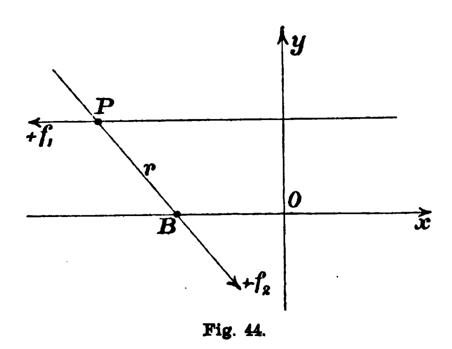


Fig. 44.

12. Die Länge der Focaldistanz eines Punktes (vgl. §§ 39; 41). Die Focaldistanz $r = PB$ eines Punktes $P = \lambda, \mu$, seine absolute Entfernung vom Brennpunkte B, ist:

(53⁰) $r = \frac{1}{2}(-\lambda + \mu)$.

13. Die einfache Focaleigenschaft der Parabel: *Für jeden Punkt der Parabel ist die Focaldistanz* (r) *gleich der Distanz* (d) *von der Directrix* (D) *und wird der Nebenwinkel beider Distanzen von der Normale* (ξ) *der Parabel halbirt* (vgl. Fig. 45).

14. Die zusammengesetzte Focaleigenschaft der Parabel: Es seien zwei gleichnamige, etwa linke Parabeln λ und λ_0 des confocalen Systems (12⁰) gegeben und sei λ_0 die äussere von beiden (vgl. Fig. 46). Der Schnittpunkt der durch den laufenden Punkt $P = \lambda, \mu$ der Parabel λ zur x-Axe gezogenen Parallelen mit der Parabel λ_0 sei $P_0 = \lambda_0, \mu_0$. Nach (53⁰) ist dann:

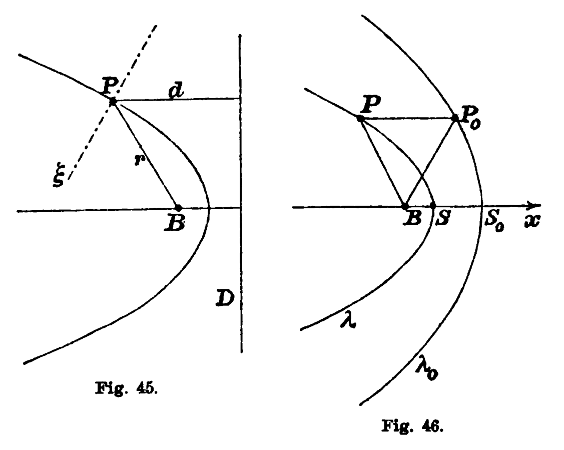


Fig. 45. Fig. 46.

$$PB = \frac{1}{2}(\mu - \lambda), \quad P_0B = \frac{1}{2}(\mu_0 - \lambda_0)$$

und nach (42⁰) und (43⁰):

$$PP_0 = -\frac{1}{2}(\lambda_0 - \lambda) - \frac{1}{2}(\mu_0 - \mu).$$

Danach wird:

$$PP_0 + P_0B - PB = \lambda - \lambda_0$$

oder wenn wir mit PP_0B die Länge der gebrochenen Linie von P über P_0 nach B bezeichnen und beachten, dass $\lambda - \lambda_0$ die doppelte absolute Entfernung der beiden Scheitelpunkte S und S_0 ist:

$$PP_0B - PB = 2 \cdot SS_0.$$

Der Ausdruck dieser Formel in Worten findet sich in § 43, IV.

Anmerkung III.

Das confocale System der Ellipsoide und Hyperboloide oder der Paraboloide als Flächenschaar.

1. Das confocale System der Ellipsoide und Hyperboloide in Ebenencoordinaten dargestellt. In der Einführung *der vier Doppelebenen* $\tau = -\infty, \gamma, \beta, \alpha$ unterscheidet sich das allgemeine confocale System § 3, 9 von der in Ebenencoordinaten u, v, w dargestellten und übrigens mit ihm identischen Flächenschaar:

(1⁰) $$(\alpha - \tau) u^2 + (\beta - \tau) v^2 + (\gamma - \tau) w^2 = 1,$$

bei welcher den Werthen $\tau = -\infty, \gamma, \beta, \alpha$ *die vier Kegelschnitte* der Schaar*) entsprechen:

(2⁰) $$\begin{cases} \text{der imaginäre Kugelkreis} & : u^2 + v^2 + w^2 = 0 \\ \text{die Focalellipse} & : (\alpha - \gamma) u^2 + (\beta - \gamma) v^2 = 1 \\ \text{die Focalhyperbel} & : (\alpha - \beta) u^2 + (\gamma - \beta) w^2 = 1 \\ \text{die imaginäre Focalellipse} & : (\beta - \alpha) v^2 + (\gamma - \alpha) w^2 = 1. \end{cases}$$

Für $\alpha = \beta$ geht von diesen Kegelschnitten der zweite in den Focalkreis (vgl. § 2, 8′) des Systems § 3, 9′ über, während die beiden letzten in das imaginäre Punktpaar

$$(\gamma - \alpha) w^2 = 1$$

auf der Focalaxe des Systems zusammenfallen**).

Für $\beta = \gamma$ vereinigen sich die beiden reellen unter den vier Kegelschnitten zu dem reellen Punktpaar:

$$(\alpha - \beta) u^2 = 1,$$

*) Vgl. Lindemann, a. § 1 a. O. S. 267.
**) Vgl. ebenda S. 262, Nr. 6 und S. 274.

dem Hauptbrennpunktpaar des Systems § 3, 9″ und wird aus der imaginären Focalellipse ein imaginärer Focalkreis.

2. Das confocale System der Paraboloide in Ebenencoordinaten dargestellt. Analoges gilt für das allgemeine confocale System der Paraboloide § 27, 9, dessen Gleichung in Ebenencoordinaten lautet*):

$$(3^0) \qquad (\beta - \tau) v^2 + (\gamma - \tau) w^2 - \tau u^2 + 2u = 0.$$

Während nämlich bei dem System § 27, 9 den Werthen $\tau = -\infty, \beta, \gamma, +\infty$ *vier Doppelebenen* entsprechen, liefern bei (3^0) dieselben Werthe die *vier Kegelschnitte* der Schaar:

den imaginären Kugelkreis	: $u^2 + v^2 + w^2 = 0$
die linke Focalparabel	: $(\beta - \gamma) v^2 - \gamma u^2 + 2u = 0$
die rechte Focalparabel	: $(\gamma - \beta) w^2 - \beta u^2 + 2u = 0$
den imaginären Kugelkreis	: $u^2 + v^2 + w^2 = 0.$

Für $\beta = \gamma$ fallen die beiden mittleren dieser Kegelschnitte in das Punktpaar:

$$-\beta u^2 + 2u = 0,$$

bestehend aus dem Hauptbrennpunkt $B_0 = C_0$ des Systems § 27, 9′ und dem unendlich fernen Punkte der x-Axe, zusammen.**)

3. Uebergang von dem confocalen System der Ellipsoide und Hyperboloide auf das der Paraboloide.

Um das confocale System der Ellipsoide und Hyperboloide:

$$\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} - 1 = 0,$$

$$(\alpha - \tau) u^2 + (\beta - \tau) v^2 + (\gamma - \tau) w^2 - 1 = 0$$

in das der Paraboloide überzuführen, beziehen wir seine Gleichungen durch die zusammengehörigen Transformationsformeln für Punkt- und Ebenencoordinaten:

$$x = x' + \omega, \quad y = y', \quad z = z',$$

$$u = \frac{u'}{1 - \omega u'}, \quad v = \frac{v'}{1 - \omega u'}, \quad w = \frac{w'}{1 - \omega u'}$$

auf ein neues Coordinatensystem $O'x'y'z'$, dessen $y'z'$-Ebene gegen die yz-Ebene des alten $Oxyz$ um die Strecke ω ($\omega > 0$) nach rechts verschoben ist (vgl. Fig. 1 und Fig. 20). Zugleich führen wir für die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \tau$ durch die Gleichungen:

$$\alpha = \omega^2, \quad \beta = \omega\beta', \quad \gamma = \omega\gamma', \quad \tau = \omega\tau'$$

die neuen Constanten $\omega, \beta', \gamma', \tau'$ ein. Die vorgelegten Gleichungen nehmen dann die Gestalt an:

---

*) Vgl. Lindemann, a. § 1 a. O. S. 260 und S. 303.
**) Vgl. ebenda S. 265 und S. 315.

$$\frac{x'^2}{\omega - \tau'} + \frac{y'^2}{\beta' - \tau'} + \frac{z'^2}{\gamma' - \tau'} + \frac{2x'}{1 - \frac{\tau'}{\omega}} + \frac{\tau'}{1 - \frac{\tau'}{\omega}} = 0,$$

$$- u'^2\tau' + (\beta' - \tau')v'^2 + (\gamma' - \tau')w'^2 - \frac{1}{\omega} + 2u' = 0.$$

Indem wir jetzt ω über alle Grenzen wachsen lassen und für die accentuirten Buchstaben wieder unaccentuirte setzen, erhalten wir:

$$\frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} + 2x + \tau = 0,$$

$$(\beta - \tau)v^2 + (\gamma - \tau)w^2 - \tau u^2 + 2u = 0,$$

also das System der confocalen Paraboloide. Derselbe Grenzübergang führt die vier Kegelschnitte der einen Flächenschaar (vgl. Anm. III, 1) in die der anderen (vgl. Anm. III, 2) über, ebenso die elliptischen in die parabolischen Coordinaten.

Anmerkung IV.

Ueber die Bestimmung der Richtung eines Strahles.

1. **Für den absoluten Werth einer Quadratwurzel** aus einer positiven reellen Grösse X brauchen wir das Symbol $\sqrt{\overline{\overline{X}}}$ mit doppeltem Horizontalstrich.

2. **Der Winkel zwischen zwei Strahlen.** Eine mit einem bestimmten Durchlaufungssinn (einer Pfeilspitze) versehene gerade Linie im Raume soll, wenn sie beiderseits unbegrenzt ist, ein *Strahl,* wenn sie von einem bestimmten Anfangspunkt ausgeht, ein *Halbstrahl* genannt werden. Unter dem *Winkel* ω *zweier Strahlen* s_1 und s_2 (vgl. Fig. 47) ist derjenige Winkel zu verstehen*), dessen Schenkel zwei von einem beliebigen Punkte O ausgehende, mit s_1 und s_2 parallele und gleichsinnige Halbstrahlen h_1 und h_2 sind und welcher der Ungleichung $0 \leqq \omega \leqq \pi$ entspricht. Die Ungleichung schliesst die Winkel: $2\pi - \omega$, $\omega + 2\pi$, u. s. w. zwischen denselben Schenkeln aus, ist daher überflüssig, wenn nicht der Winkel selbst, sondern der *Cosinus des Winkels der beiden Strahlen* s_1 und s_2, $\cos\omega$, bestimmt werden soll.

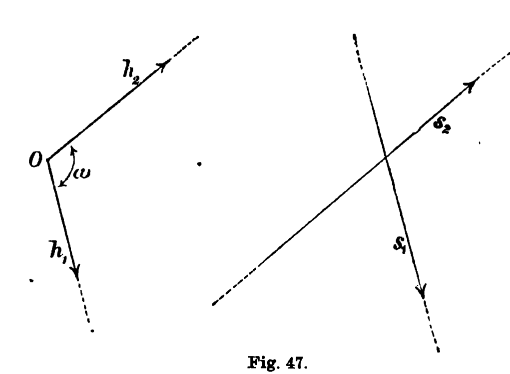


Fig. 47.

3. **Richtungswinkel und Richtungscosinus eines Strahles.** In den eben angegebenen Bedeutungen sind auch die drei Richtungswinkel und

---

*) Vgl. Lindemann, a. § 1 a. O. S. 6.

Richtungscosinus eines Strahles gegen die Coordinatenaxen, welch letztere ebenfalls Strahlen sind, zu verstehen. Jeder gegebene Strahl hat drei bestimmte Richtungscosinus und zu drei gegebenen Richtungscosinus gehört, durch einen gegebenen Punkt gehend, ein bestimmter Strahl.

Sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Richtungscosinus zweier Strahlen, so entspricht der Winkel ω zwischen ihnen den beiden Formeln:

$$\cos\omega = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2$$
$$\sin\omega = \sqrt{(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)^2 + (\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)^2}.$$

4. **Halbirungslinie des Winkels zweier Halbstrahlen.** Derjenige Halbstrahl, welcher den Winkel ω zweier von einem Punkte P ausgehender Halbstrahlen mit den Richtungscosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ halbirt, hat die Richtungscosinus:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\cos\frac{\omega}{2}}, \quad \frac{\beta_1 + \beta_2}{2\cos\frac{\omega}{2}}, \quad \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\cos\frac{\omega}{2}};$$

für $\omega = \pi$ wird er unbestimmt.

5. **Verbindungsstrahl von einem Punkte nach einem anderen.** Sind $P_1 = x_1, y_1, z_1$ und $P_2 = x_2, y_2, z_2$ zwei durch ihre Coordinaten gegebene Punkte und bezeichnet:

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

den absoluten Werth ihrer Entfernung, so sind

$$\frac{x_2 - x_1}{s}, \quad \frac{y_2 - y_1}{s}, \quad \frac{z_2 - z_1}{s}$$

die Richtungscosinus des von P_1 nach P_2 gerichteten Verbindungsstrahles beider Punkte.

6. **Die positive Tangente einer durch eine Parameterdarstellung gegebenen Raumcurve.** Eine Raumcurve sei durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

mit einem Parameter t dargestellt. Sind t und t_1 zwei benachbarte Werthe des Parameters, $P = x, y, z$ und $P_1 = x_1, y_1, z_1$ die zugehörigen Punkte der Curve, so sollen für hinreichend kleine absolute Werthe der Differenz $t_1 - t$ die Taylor'sche Entwickelung:

$$x_1 = \varphi(t_1) = \varphi(t + t_1 - t) = \varphi(t) + \varphi'(t)\cdot(t_1 - t) + \frac{1}{2}\varphi''(t)\cdot(t_1 - t)^2 + \cdots$$
$$= x + x'(t_1 - t) + \frac{1}{2}x''(t_1 - t)^2 + \cdots,$$

sowie die entsprechenden für y_1 und z_1 gelten. Wird die Differenz $t_1 - t$ so klein genommen, dass bei einem vorgegebenen Genauigkeitsgrade die Glieder zweiter und höherer Ordnung in den bezeichneten Entwicklungen vernachlässigt werden können, so ist P_1 ein Nachbarpunkt erster Ordnung des Punktes P auf der Curve; wird die Differenz $t_1 - t$ ausserdem positiv angenommen, so ist P_1 der im Sinne des wachsenden t auf P folgende

Nachbarpunkt erster Ordnung. Beides vorausgesetzt, *verstehen wir unter der positiven Tangente der Curve im Punkte P den Verbindungsstrahl der Punkte P und P_1 von P nach P_1*, wobei wir voraussetzen, dass x', y', z' nicht alle drei null sind, also die absolute Entfernung der beiden Punkte:

$$PP_1 = s'(t_1 - t), \quad s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

nicht verschwindet. Nach (5) sind die Richtungscosinus der positiven Tangente:

$$\frac{x'}{s'}, \quad \frac{y'}{s'}, \quad \frac{z'}{s'}.$$

Anmerkung V.

Ueber krummlinige Coordinaten im Raume.

1. **Begriff der krummlinigen Coordinaten.** Wenn die Coordinaten x, y, z des laufenden Raumpunktes von drei Parametern λ, μ, ν abhängig gemacht werden durch die Gleichungen:

$$(1^0) \qquad x = \varphi(\lambda, \mu, \nu), \quad y = \psi(\lambda, \mu, \nu), \quad z = \chi(\lambda, \mu, \nu),$$

die ihrerseits wieder nach λ, μ, ν auflösbar sind:

$$(2^0) \qquad \lambda = \Phi(x, y, z), \quad \mu = \Psi(x, y, z), \quad \nu = X(x, y, z),$$

so werden die Parameter λ, μ, ν als *krummlinige Coordinaten* bezeichnet. Der Ort der Punkte, für welche eine der drei Coordinaten λ, μ, ν constant ist, heisst eine *Coordinatenfläche*, eine *λ-, μ- oder ν-Fläche*, jenachdem λ, μ oder ν die constante Coordinate ist. Der Ort der Punkte, für welche zwei der Coordinaten λ, μ, ν constant sind, heisst eine *Coordinatenlinie*, eine *$\mu\nu$-, $\nu\lambda$- oder $\lambda\mu$-Linie*, jenachdem μ und ν, ν und λ oder λ und μ constant sind. Die erste Gleichung (2^0) ist bei festem λ die *Gleichung einer λ-Fläche* in laufenden Coordinaten x, y, z; die zweite und dritte Gleichung (2^0) stellen bei festem μ und ν in gleichem Sinne eine $\mu\nu$-Linie dar. Die Gleichungen (1^0) geben bei festem λ die *Parameterdarstellung einer λ-Fläche* in laufenden Parametern μ, ν und bei festen μ und ν die *Parameterdarstellung einer $\mu\nu$-Linie* in laufendem Parameter λ.

Da die Gleichungen (1^0) die besondere Form $x = \lambda$, $y = \mu$, $z = \nu$ annehmen können, sind die gewöhnlichen Raumcoordinaten ein specieller Fall der krummlinigen*). Ihre Coordinatenflächen sind Ebenen, „x-, y- und z-Ebenen", beziehungsweise parallel der yz-, zx- und xy-Ebene des Axensystems $Oxyz$. Ihre Coordinatenlinien sind gerade Linien, „yz-, zx- und xy-Linien", beziehungsweise parallel der x-, y- und z-Axe des Axensystems $Oxyz$.

2. **Positive Richtung der Coordinatenlinien in einem Punkte.** Bei dem System der gewöhnlichen Coordinaten hat jede Coordinatenlinie constante Richtung und einen constanten positiven Durchlaufungssinn, der mit

*) Vgl. Lindemann, a. § 1 a. O. S. 272.

demjenigen der parallelen Coordinatenaxe übereinstimmt und dadurch charakterisirt ist, dass in ihm die einzige längs der Coordinatenlinie veränderliche Coordinate wächst. In analoger Weise ist bei krummlinigen Coordinaten *die positive Richtung einer Coordinatenlinie in einem Punkte P durch die dem wachsenden Parameter der Coordinatenlinie entsprechende positive Tangente derselben* (vgl. Anm. IV, 6) *im Punkte P bestimmt.*

Da in den Gleichungen (1^0) bei constanten Werthen von μ und ν, ν und λ oder λ und μ die Parameterdarstellung der Coordinatenlinien in laufendem Parameter λ, μ oder ν vorliegt, so sind die Richtungscosinus der positiven Tangenten nach Anm. IV, 6 anzugeben. Zu dem Ende werde durch untere Indices 1, 2, 3 die partielle Differentiation nach λ, μ, ν $\left(x_1 = \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \text{ u. s. w.}\right)$ bezeichnet und zur Abkürzung gesetzt:

$$(3^0) \quad l = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad m = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}, \quad n = \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}.$$

Alsdann sind die Richtungscosinus der *positiven Tangenten der Coordinatenlinien im Punkte P,* die wir die *Axen ξ, η, ζ des Punktes P im krummlinigen Coordinatensystem* λ, μ, ν nennen wollen, gegen das Axensystem $Oxyz$ aus folgender Tabelle zu entnehmen:

(4^0)

	x	y	z
ξ	$\frac{x_1}{l}$	$\frac{y_1}{l}$	$\frac{z_1}{l}$
η	$\frac{x_2}{m}$	$\frac{y_2}{m}$	$\frac{z_2}{m}$
ζ	$\frac{x_3}{n}$	$\frac{y_3}{n}$	$\frac{z_3}{n}$

Dabei wird, wie in Anm. IV, 6, vorausgesetzt, dass die Functionen (1^0) für benachbarte Werthe λ_1, μ_1, ν_1 zu den Coordinaten λ, μ, ν des Punktes P in die Taylor'schen Reihen nach ganzen Potenzen von $\lambda_1 - \lambda$, $\mu_1 - \mu$ oder $\nu_1 - \nu$ entwickelbar sind und die drei in l, m oder n vorkommenden partiellen Differentialquotienten nicht alle drei verschwinden.

Die krummlinigen Coordinaten sind nach (4^0) *orthogonal,* wenn identisch in λ, μ, ν die Gleichungen bestehen:

$$(5^0) \quad \begin{cases} x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 = 0 \\ x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1 = 0 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \end{cases}$$

In diesem Falle sind die Axen ξ, η, ζ des Punktes P nicht nur die positiven Tangenten der Coordinatenlinien im Punkte P, sondern zugleich die *„positiven" Normalen der Coordinatenflächen* in ihm.

3. **Krummlinige Coordinaten eines Linienelementes*).** Sind x, y, z die gewöhnlichen Coordinaten des *Anfangspunktes* und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ diejenigen des *Endpunktes* eines Linienelementes, so nennen wir die

*) Vgl. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Abschn. II, Leipzig 1890, S. 4.

sechs Grössen x, y, z, dx, dy, dz, von denen die drei letzten niemals alle drei verschwinden sollen, die *gewöhnlichen Coordinaten des Linienelementes.* Es sind dann (vgl. Anm. IV, 5):

$$(6^0) \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

die absolute Länge und

$$(7^0) \qquad \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

die Richtungscosinus des Linienelementes gegen das Axensystem $Oxyz$ oder, was dasselbe ist, gegen die positiven Richtungen der durch den Anfangspunkt des Linienelementes gehenden Coordinatenlinien des Systems der gewöhnlichen Coordinaten.

Sind λ, μ, ν die krummlinigen Coordinaten des Anfangspunktes und $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$ diejenigen des Endpunktes eines Linienelementes, so sollen die sechs Grössen λ, μ, ν, $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ die *krummlinigen Coordinaten des Linienelementes* heissen. Zwischen gewöhnlichen und krummlinigen Coordinaten eines Linienelementes bestehen unter den bereits zur Tabelle (4^0) angegebenen Voraussetzungen über die Functionen (1^0) die Relationen:

$$(8^0) \qquad \begin{cases} dx = x_1 d\lambda + x_2 d\mu + x_3 d\nu \\ dy = y_1 d\lambda + y_2 d\mu + y_3 d\nu \\ dz = z_1 d\lambda + z_2 d\mu + z_3 d\nu. \end{cases}$$

Daher stellt sich, *bei Beschränkung auf orthogonale Coordinaten,* die *absolute Länge* des Linienelementes in seinen krummlinigen Coordinaten nach (6^0), (3^0) und (5^0) so dar:

$$(9^0) \qquad ds = \sqrt{l^2 d\lambda^2 + m^2 d\mu^2 + n^2 d\nu^2}.$$

Die Richtungscosinus des Linienelementes werden bei Anwendung seiner krummlinigen Coordinaten, analog wie bei den gewöhnlichen in der Darstellung (7^0), auf die positiven Richtungen der durch seinen Anfangspunkt λ, μ, ν gehenden Coordinatenlinien des krummlinigen Coordinatensystems, also auf die Axen ξ, η, ζ dieses Punktes bezogen. Es ergiebt sich dann für den Cosinus p des Linienelementes gegen die Axe ξ nach (4^0) und (7^0):

$$p = \frac{x_1}{l}\frac{dx}{ds} + \frac{y_1}{l}\frac{dy}{ds} + \frac{z_1}{l}\frac{dz}{ds}$$

oder nach (8^0), (5^0) und (3^0):

$$p = \frac{l\,d\lambda}{ds}.$$

So folgt allgemein:

Die Richtungscosinus p, q, r eines Linienelementes mit den orthogonalen krummlinigen Coordinaten λ, μ, ν, $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ und der absoluten Länge ds gegen die positiven Richtungen der durch seinen Anfangspunkt λ, μ, ν gehenden Coordinatenlinien (gegen die Axen ξ, η, ζ seines Anfangspunktes) haben die Werthe:

$$(10^0) \qquad p = \frac{l\,d\lambda}{ds}, \quad q = \frac{m\,d\mu}{ds}, \quad r = \frac{n\,d\nu}{ds}.$$

Die Zähler dieser Ausdrücke: $l d\lambda$, $m d\mu$, $n d\nu$ sind nach Grösse und Vorzeichen die senkrechten Projectionen des Linienelementes auf die Axen ξ, η, ζ.

4. **Die Charakteristik eines Linienelementes.** Unter der Charakteristik eines Linienelementes x, y, z, dx, dy, dz im gewöhnlichen Coordinatensystem verstehen wir die Nebeneinanderstellung ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) der Vorzeichen seiner drei Richtungscosinus (7^0) gegen die positiven Richtungen der Coordinatenlinien in dem Sinne, dass z. B. $\mathfrak{x}$ das Symbol $+$ oder $-$ oder 0 bedeutet, jenachdem $\frac{dx}{ds}$ positiv oder negativ oder null ist, jenachdem also das Element mit der positiven x-Axe einen spitzen oder stumpfen oder rechten Winkel bildet. Die Vorzeichen der drei Richtungscosinus (7^0) sind zugleich diejenigen von dx, dy, dz.

Unter der Charakteristik desselben Linienelementes x, y, z, dx, dy, $dz \equiv \lambda$, μ, ν, $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ im krummlinigen Coordinatensystem verstehen wir im gleichen Sinne die Nebeneinanderstellung ($\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$) der Vorzeichen seiner drei Richtungscosinus (10^0) gegen die positiven Richtungen der Coordinatenlinien. Die Vorzeichen der drei Richtungscosinus (10^0) sind, da l, m, n, ds als positive Grössen eingeführt sind, im Allgemeinen (vgl. jedoch § 9) zugleich diejenigen von $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$.

Anmerkung VI.

Die Construction der Focallinien und Flächennormalen.

1. Um die *vier Focallinien eines Punktes P in Bezug auf die Focalhyperbel b und die Focalellipse* c (vgl. § 12) zu construiren, suchen wir zunächst die Centralprojection c'' der Focalellipse c vom Punkte P auf die Ebene der Focalhyperbel. Zu diesem Zwecke nehmen wir die xz-Ebene (vgl. Fig. 1) als Aufrissebene und die xy-Ebene als Grundrissebene und drehen alsdann die letztere um die x-Axe in die erstere hinein, sodass die positive y-Axe in die negative z-Axe fällt. Focalhyperpel b und Focalellipse c liegen nun in der Ebene der Zeichnung (vgl. Fig. 48); P' sei der Grundriss, P'' der Aufriss des Punktes P, P_x der Schnittpunkt der Geraden $P'P''$ mit der x-Axe. Nunmehr bestimmt sich die gesuchte Projection c'' aus der gegebenen Ellipse c durch eine Centralcollineation in der Zeichnungsebene*), welche ihrerseits durch folgende Angaben bestimmt**) ist: Ihr Centrum E (in Fig. 48 nicht angegeben) liegt auf der Geraden $P'P''$ um die Strecke P_xP' von P'' nach abwärts (der ursprünglich gegebene Raumpunkt P ist dabei vor der xz- und oberhalb der xy-Ebene angenommen, wie in § 23), ihre Axe ist die x-Axe, ihre Fluchtlinie e_∞ und ihre Verschwindungslinie e_v gehen respective durch P'' und P' parallel zur x-Axe. Danach lässt sich der Kegelschnitt c'' sofort construiren***). Er ist eine

---

*) Vgl. Rohn-Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Leipzig 1893, Bd. I, S. 134, Abs. 174. **) Vgl. ebenda S. 138, Abs. 182. ***) Vgl. ebenda S. 193, Abs. 283.

Hyperbel, Parabel oder Ellipse, jenachdem die Verschwindungslinie e_v die gegebene Ellipse c schneidet, berührt oder nicht schneidet (in Fig. 48 tritt der erste Fall ein).

Da nun die Kegelschnitte b und c'' die Schnittcurven der beiden Focalkegel des Punktes P mit der Aufrissebene sind, so liefern ihre gegen-

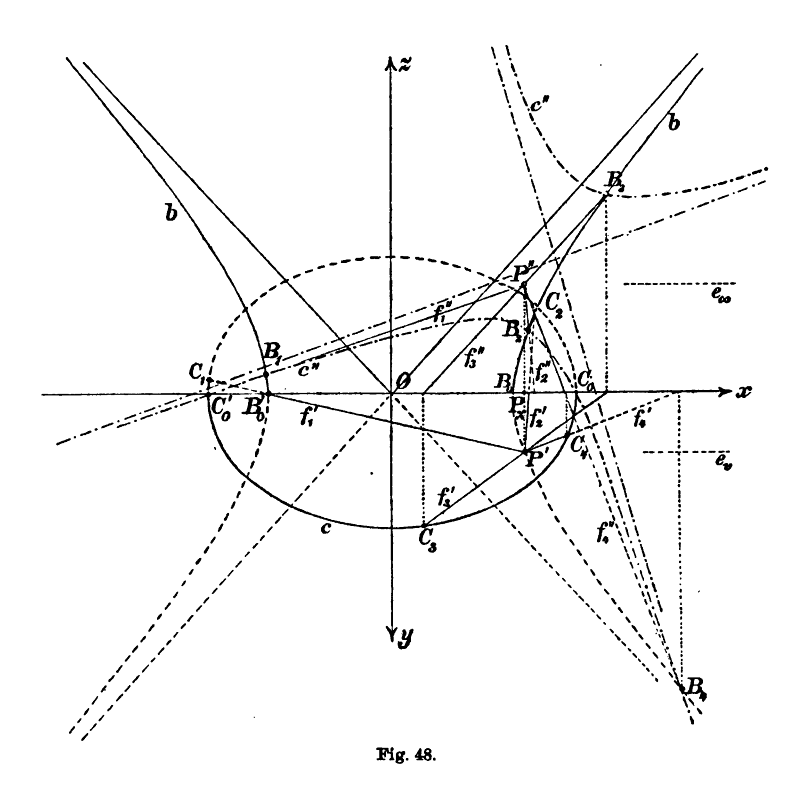


Fig. 48.

seitigen Schnittpunkte B_1, B_2, B_3, B_4 die zweiten Spurpunkte der vier gesuchten Focallinien f_1, f_2, f_3, f_4. Verbinden wir daher diese vier Punkte mit P'', so erhalten wir die Aufrisse f_1'', f_2'', f_3'', f_4'' der Focallinien. Die durch P' gehenden Grundrisse f_1', f_2', f_3', f_4' sind dann bestimmt, ebenso die ersten Spurpunkte C_1, C_2, C_3, C_4 der Focallinien, welche auf die Focalellipse c fallen müssen.

Sind die vier Focallinien des Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ in solcher Weise durch ihre Grundrisse und Aufrisse gegeben, so können *die Normalen* ξ, η, ζ *der drei durch P gehenden Flächen* λ, μ, ν *des confocalen Systems* (vgl. § 13, Fig. 5) als Halbirungslinien je zweier Focallinien construirt werden*).

Die so construirten Focallinien und Normalen sind in den Figuren 6; 13; 15; 16 und 18 in schiefer Parallelprojection mit dem Verkürzungsverhältniss $^1/_2$ dargestellt.

---

*) Vgl. Rohn-Papperitz a. a. O. S. 61, Abs. 93.

2. Nicht wesentlich anders gestaltet sich die Construction der *vier Focallinien eines Punktes P mit Bezug auf die beiden Focalparabeln b und c* (vgl. § 35). Nur ist hier der Kegelschnitt c'' eine Hyperbel, deren eine

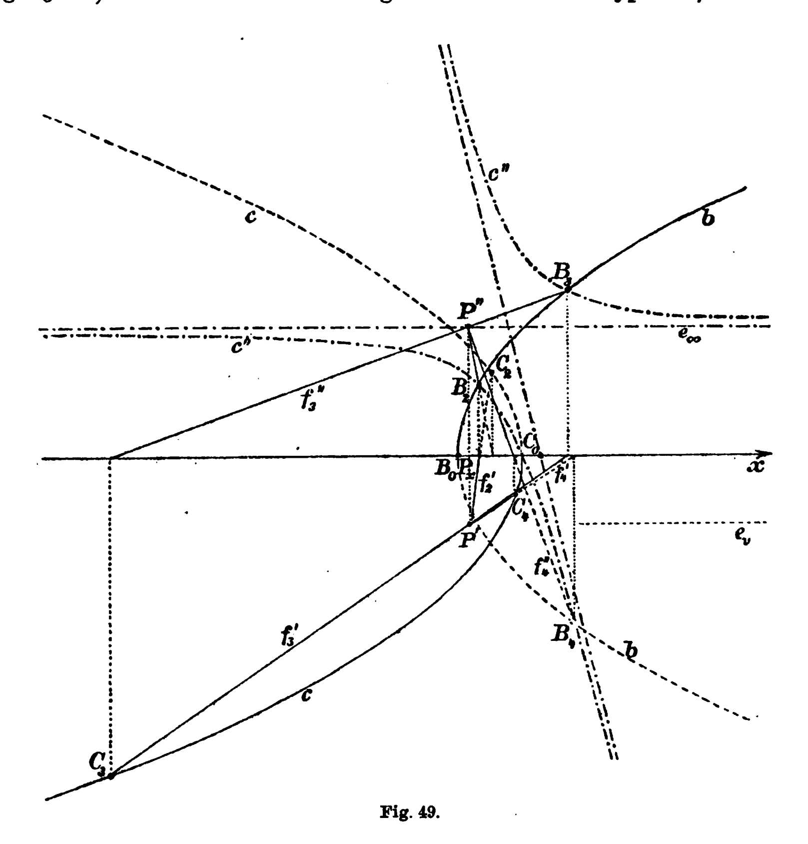


Fig. 49.

Asymptote (vgl. Fig. 49) mit der Fluchtlinie e_∞ zusammenfällt. Die vier Focallinien sind in Fig. 23 in schiefer Parallelprojection dargestellt, ebenso die wie vorhin erhaltenen Normalen ξ und η der Paraboloide λ und μ in Fig. 28 und Fig. 30.

Berichtigungen.

S. 3, Z. 8 (des Haupttextes) v. u. ist nach „Focalkreises" ein Komma zu setzen.

S. 8, Z. 2 u. Z. 4 v. u.; S. 13, Z. 2 v. u.; S. 27, Z. 12 v. o. ist das Zeichen + am Ende der Zeile zu streichen.

S. 17, Z. 8 v. u. ist statt „das letzte" zu lesen „die letzte".

S. 30, Z. 5 v. u. st. „λ, γ, μ" zu lesen „λ, γ, ν".

S. 38, Z. 6 v. o. st. „errichtet wird" zu lesen „errichtet sind".

S. 49, Z. 13 v. u. und S. 90, Z. 19 v. u. sind die Quadratwurzeln mit Doppelstrichen zu versehen.

S. 50, in Formel (43) ist links unten st. „— +" zu lesen „— — +".

S. 55, Z. 7 v. u. st. „C und C_4" zu lesen „P und C_4".

S. 64, Z. 6 und Z. 7 v. u. st. II' und III' zu lesen II'' und III''.

S. 98, Z. 14 v. u. st. „in die Worte" zu lesen „in Worte".

S. 108, Z. 7 v. u. st. „von einer" zu lesen „von seiner".

S. 118, Z. 8 v. u. st. (14) zu lesen (14').

S. 120, Z. 14 v. o. st. 8 zu lesen (8).

S. 142 ist die Figur statt mit Fig. 23 mit Fig. 23' zu bezeichnen.

S. 170, Z. 13 v. u. ist nach „schneiden" einzuschalten „(vgl. Fig. 41)".

S. 172, Z. 8 v. o. st. „+ =" zu lesen „= +".


Math 8588.96.2
Die Focaleigenschaften der Flachen
Cabot Science 003354379
3 2044 091 921 650